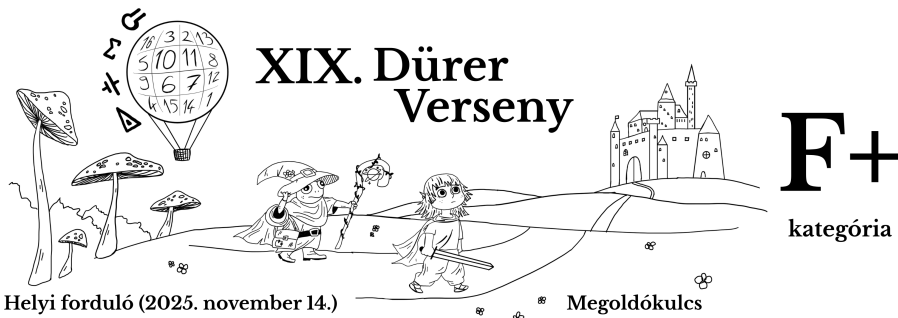




1. feladat

Vizsgáljuk meg a gyűrű egy kicsiny, az egyensúly beálltakor x_1 hosszúságú szakaszát. Ennek a szakasznak a feléhez egy

$$\varphi = \frac{2\pi x_1}{2 \cdot 2\pi R_1} = \frac{x_1}{2R_1} \quad (1.1)$$

középponti szög tartozik, ahol R_1 a gumi megnyúlt állapotához tartozó sugara. Legyen F a vizsgált darabra az egyik oldalról ható erő. Mivel a gumi már nem nyúlik tovább, és nem is gyorsul, így a másik oldalról is F erő hat a kis szakaszra. Ebből adódóan a darabkára ható eredő erőnek csak sugárirányú komponense van. Ez fogja biztosítani a szükséges centripetális gyorsulást a körpályán maradáshoz. Tehát felírhatjuk, hogy

$$dm \cdot \omega^2 R_1 = F_e, \quad (1.2)$$

ahol dm a kis darabka tömege, F_e pedig az arra ható eredő erő nagysága, melynek értékét az oldalról ható F erők sugárirányú komponenseinek összege adja:

$$F_e = 2F \sin \varphi \approx 2F \varphi = \frac{F x_1}{R_1}. \quad (1.3)$$

A kis szakasz tömege felírható az alábbi módon:

$$dm = \frac{m x_1}{2\pi R_1}. \quad (1.4)$$

Ekkor az (1.2), (1.3) és (1.4)-es egyenletek felhasználásával már meghatározhatjuk F nagyságát:

$$F = \frac{m \omega^2 R_1}{2\pi}. \quad (1.5)$$

Most határozzuk meg a kis darabka rugóállandóját. Ehhez írjuk fel a Hook-törvényt a teljes gumira, illetve a kiszemelt kis gumidarabra:

$$D_x dx = D ds, \quad (1.6)$$

ahol dx és ds a kiszemelt darabka, illetve a teljes gumi megnyúlása; D_x és D pedig rendre ezek rugóállandója. Felhasználva, hogy a gumiban ébredő erő csak a relatív megnyúlástól függ (mely állandó a gumi mentén), felírhatjuk hogy

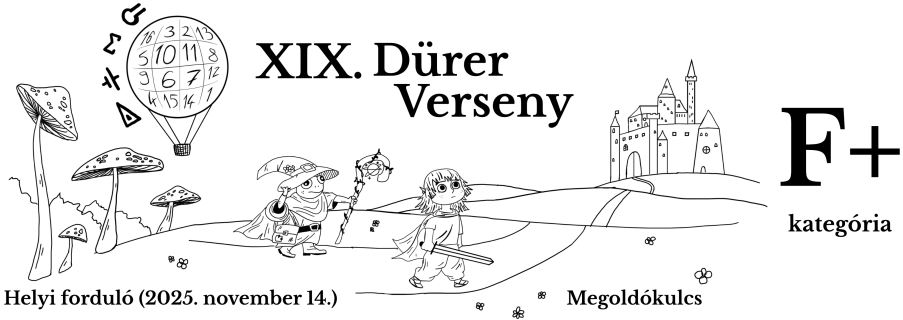
$$D_x x_0 \frac{dx}{x_0} = D 2\pi R_0 \frac{ds}{2\pi R_0}, \quad (1.7)$$

ahol x_0 a kis szakasz eredeti (nyújtatlan) hossza. Felhasználva a relatív megnyúlás definícióját:

$$\frac{dx}{x_0} = \frac{ds}{2\pi R_0}. \quad (1.8)$$

Innen pedig

$$D_x = D \frac{2\pi R_0}{x_0} = D \frac{2\pi R_1}{x_1} \quad (1.9)$$



adódik, hiszen a gumi mindenhol egyenletesen nyúlik meg, így $R_0/x_0 = R_1/x_1$ (mivel a kis darabhoz végig ugyanakkora középponti szög tartozik). Így már a kis szakasz eredeti hosszához képest vett $\Delta x = x_1 - x_0$ megnyúlása kiszámítható:

$$\Delta x = \frac{F}{D_x} = \frac{m\omega^2 R_1}{2\pi} \cdot \frac{x_1}{2\pi R_1 D} = \frac{m\omega^2}{4\pi^2 D} \cdot x_1. \quad (1.10)$$

Ebből a teljes gumi Δs megnyúlására felhasználva, hogy a relatív megnyúlás az egész gumi mentén állandó

$$\Delta s = \frac{m\omega^2}{4\pi^2 D} \cdot 2\pi R_1 = \frac{m\omega^2 R_1}{2\pi D} \quad (1.11)$$

adódik. Nyilván

$$s_0 = 2\pi R_0, \quad (1.12)$$

valamint

$$s_0 + \Delta s = 2\pi (R_0 + \Delta R), \quad (1.13)$$

ahol s_0 a gumi anyagának eredeti hossza és ΔR a gumi sugarának a változása a nyújtatlan állapothoz képest. Így a sugár változása

$$\Delta R = \frac{\Delta s}{2\pi} = \frac{m\omega^2 R_1}{4\pi^2 D}. \quad (1.14)$$

Mivel az adott ω -hoz tartozó sugár $R_1 = R_0 + \Delta R$, így

$$\Delta R = \frac{m\omega^2}{4\pi^2 D} (R_0 + \Delta R), \quad (1.15)$$

amit ΔR -re rendezve a

$$\Delta R = \frac{m\omega^2 R_0}{4\pi^2 D - m\omega^2} \quad (1.16)$$

összefüggésre jutunk, amelyhez R_0 -t hozzáadva megkapjuk az adott ω -hoz tartozó sugarat

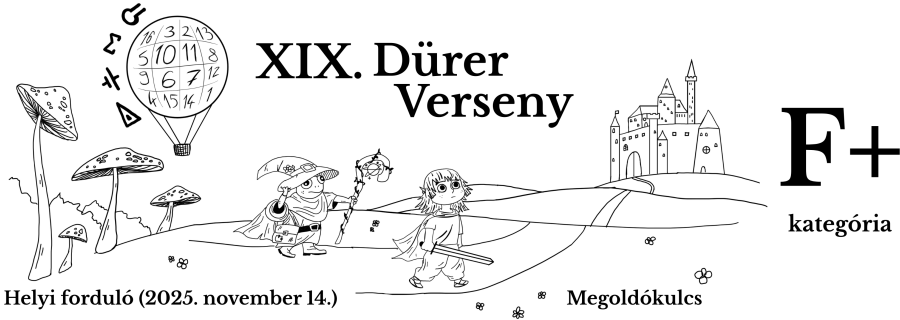
$$R_1 = R_0 + \frac{m\omega^2 R_0}{4\pi^2 D - m\omega^2} = \frac{4\pi^2 D}{4\pi^2 D - m\omega^2} R_0. \quad (1.17)$$

Megjegyzés: A feladatot az energiaminimum elvével is meg lehet oldani. Ehhez érdemes bevezetni a J összperdületet, mely a keresett stacionárius állapotban az ω szögsebességhez és a gumi alakját leíró R sugárhoz tartozik (és az összes többi vizsgált állapothoz, mivel egy virtuális sugárváltozás okozta megnyúlás során a perdület megmarad):

$$J = mR_1^2\omega(R_1) = mR^2\omega(R),$$

$$E(R) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\Delta s^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega(R)^2 + \frac{1}{2}D\Delta s(R)^2 = \frac{1}{2}\frac{J^2}{mR^2} + \frac{1}{2}D\Delta s(R)^2.$$

Ezt követően $E(R)$ minimumát megkeresve ($dE/dR = 0$) majd felhasználva, hogy ezen értéket $R = R_1$ esetén veszi fel szintén az (1.17) eredményre jutunk. Ezeket követően a d^2E/d^2R deriváltat is kiszámíthatjuk, ha az elrendezés stabilitását szeretnénk megvizsgálni.



2. feladat

Először számoljuk ki a bolygó középpontja felett z magasságban a gravitációs gyorsulás nagyságát! Mivel a bolygó h magassága sokkal kisebb a sugaránál, tekinthetjük azt egy vékony körlemeznek. Vizsgáljuk meg, hogy egy m tömegű testre mekkora erő hat! Vegyünk a középponttól r távolságra egy dr szélességű körgyűrűt, ennek össztömege dM . A szimmetria miatt a vízszintes erőkomponens zérus. A z irányú erő:

$$dF_z = \frac{Gm \cdot dM}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (2.1)$$

ahol a második tényező az erő és a függőleges tengely által bezárt szög koszinusza. A gyűrű tömegét kifejezhetjük a bolygó sűrűségét felhasználva:

$$dM = \rho h [(r + dr)^2 \pi - r^2 \pi] \approx 2\pi \rho h r dr. \quad (2.2)$$

Ezt behelyettesítve

$$dF_z = \frac{2\pi r h \rho m G}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr \quad (2.3)$$

adódik. A teljes henger által kifejtett erőt integrálással kaphatjuk meg:

$$F_z(z) = m g_z(z) = 2\pi h \rho m G z \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr. \quad (2.4)$$

Az integrál kiszámolása és egyenletrendezés után:

$$g_z(z) = 2\pi h \rho G z \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R \quad (2.5)$$

adódik, amibe a határokat behelyettesítve:

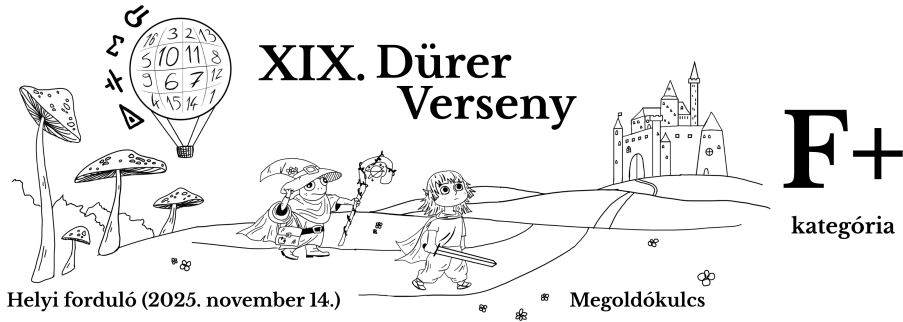
$$g_z(z) = 2\pi h \rho G \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (2.6)$$

A következő lépésben ki szeretnénk számolni a gravitációs gyorsulás sugárirányú komponensét a bolygó középpontján átmenő függőleges z tengelyhez közel. Ehhez ki kell használnunk, hogy a gravitációs mező forrásmentes a bolygón kívül, tehát egy térfogat felszínein be- és kiáramló fluxus nulla. Vegyünk egy vékony dz magasságú, r sugarú hengert $z_0 \geq h/2$ magasságban, melynek tengelye egybeesik a bolygó tengelyével. Ekkor a következő összefüggést írhatjuk fel a $g_z(z)$ és $g_r(r, z)$ komponensek közt:

$$g_z(z_0 + dz) \cdot r^2 \pi + g_r(r, z_0) \cdot 2\pi r dz = g_z(z_0) \cdot r^2 \pi. \quad (2.7)$$

Átrendezve az egyenletet:

$$-r^2 \pi [g_z(z_0 + dz) - g_z(z_0)] = 2\pi r \cdot g_r(r, z_0) \cdot dz. \quad (2.8)$$



Ahogy dz -vel tartunk nullához, bal oldalon megjelenik g_z z szerinti deriváltja:

$$g_r(r, z_0) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dg_z}{dz} \Big|_{z=z_0}. \quad (2.9)$$

Behelyettesítve a (2.6)-os egyenlet eredményét, és a deriválást elvégezve:

$$g_r(r, z_0) = \frac{r}{2} \cdot 2\pi h \varrho G \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} - \frac{z_0^2}{(R^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (2.10)$$

Innen rendezés után:

$$g_r(r, z_0) = r \frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.11)$$

Mivel feltettük, hogy a kerekasztal méretei jóval kisebbek a Düránusz méreteinél, a sörök mozgásának leírásakor használható a $z_0 = h/2$ összefüggés. Látható, hogy a gyorsulás egyenesen arányos lesz a kitéréssel, és ellentétes irányú azzal, hiszen a gravitációs erő mindig vonzó.

Számoljuk ki, hogy Lancelot mennyi idő alatt juttatja a korsót az asztal túloldalára. A körmozgás feltétele a kezdeti pillanatban, ha az asztal sugara r_a :

$$m\omega_L^2 r_a = m r_a \frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.12)$$

Mivel az erő a kerület mentén végig állandó nagyságú, így valóban egyenletes körmozgást végez a korsó. A szögsebesség:

$$\omega_L = \sqrt{\frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}}. \quad (2.13)$$

Egy félkör megtételéhez szükséges idő:

$$t_L = \frac{\pi}{\omega_L} = \sqrt{\frac{\pi(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}{h \varrho R^2 G}} \approx \sqrt{\frac{\pi R}{h \varrho G}}. \quad (2.14)$$

Most számoljuk ki Artúr esetén is a túloldalra jutás idejét. A mozgásegyenlet ekkor:

$$a_r = -\frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}} r. \quad (2.15)$$

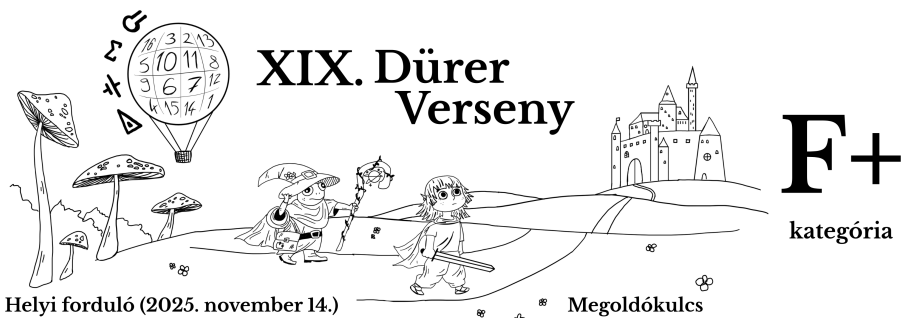
Látszik, hogy a mozgásegyenlet egy harmonikus rezgőmozgásra vezet a következő körfrekvenenciával:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}}. \quad (2.16)$$

Észrevehető, hogy $\omega_L = \omega_A$. Továbbá a keresett idő Artúr esetén szintén egy fél periódus megtételéhez tartozik, így:

$$t_A = \frac{\pi}{\omega_A} = t_L \approx \sqrt{\frac{\pi R}{h \varrho G}}. \quad (2.17)$$

Tehát Artúr és Lancelot söröi azonos idő alatt jutnak az asztal átellenes oldalára.



3. feladat

(a)

Ahogy kirázzuk a CO_2 -t a palackból, folyamatosan nő a gáztérben található részecskék száma, tehát a nyomás is, egészen addig, amíg ki nem repül a palackból a dugó. Vizsgáljuk azt az állapotot, amikor a dugó már majdnem elhagyta a palack száját. A kirepülés feltétele:

$$p_a A \geq mg + S + p_k A, \quad (3.1)$$

ahol p_a a gáz nyomása a kritikus helyzetben. Ezt kifejezve:

$$p_a = \frac{mg + S}{A} + p_k. \quad (3.2)$$

A kezdeti és a kritikus állapotokra felírhatjuk az egyetemes gáztörvényt:

$$p_0 V_0 = n_0 RT, \quad (3.3)$$

$$p_a V_a = n_a RT, \quad (3.4)$$

ahol n_0 a kezdetben, n_a pedig a kritikus pillanatban a gáztérben található gázmolekulák (először levegő, utána levegő és CO_2) anyagmennyisége. A (3.4)-es egyenletből p_a -t kifejezve:

$$p_a = \frac{n_a RT}{V_a}. \quad (3.5)$$

Ezt behelyettesítve (3.2)-be:

$$\frac{n_a RT}{V_a} = \frac{mg + S}{A} + p_k. \quad (3.6)$$

Innen n_a -t kifejezve:

$$n_a = \frac{V_a}{RT} \left(\frac{mg + S}{A} + p_k \right). \quad (3.7)$$

A pezsgőből kiszabadult CO_2 anyagmennyisége:

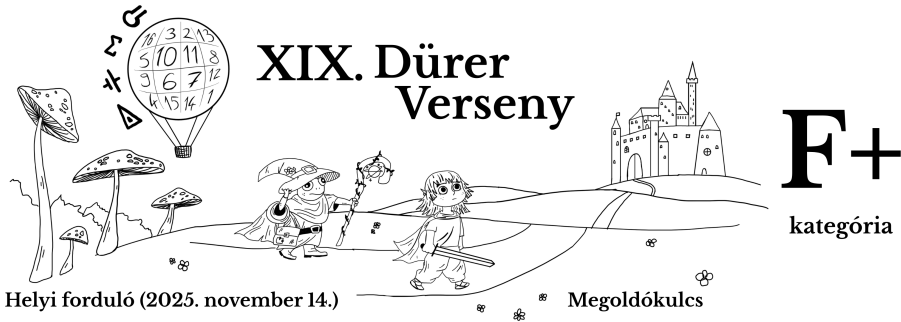
$$\Delta n = \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}, \quad (3.8)$$

ahol Δm a kiszabadult CO_2 tömege. Ez alapján a kritikus pillanatban a gázmolekulák anyagmennyisége:

$$n_a = n_0 + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}. \quad (3.9)$$

A (3.3)-as egyenletből n_0 értékét beírva:

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT} + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}. \quad (3.10)$$



Ezt visszaírva (3.7)-be:

$$\frac{p_0 V_0}{RT} + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}} = \frac{V_a}{RT} \left(\frac{mg + S}{A} + p_k \right). \quad (3.11)$$

A dugó kiszabadulása miatti térfogatváltozás alapján V_a :

$$V_a = V_0 + Ad. \quad (3.12)$$

Ezt behelyettesítve (3.11)-be, átrendezéssel megkapható Δm :

$$\Delta m = \frac{M_{\text{CO}_2}}{RT} \left(\frac{V_0 + Ad}{A} (mg + S) + p_k (V_0 + Ad) - p_0 V_0 \right). \quad (3.13)$$

Ezt felírhatjuk ηm_0 alakban is, ahol η a keresett arány. Innen η -t kifejezve:

$$\boxed{\eta = \frac{M_{\text{CO}_2}}{m_0 RT} \left(\frac{V_0 + Ad}{A} (mg + S) + p_k (V_0 + Ad) - p_0 V_0 \right)}. \quad (3.14)$$

(b)

Érdekes a problémát az üveghez rögzített koordináta-rendszerből vizsgálni. Ebben a rendszerben a levegőre a forgás miatt centrifugális erő hat, így a légtömeg a dugó felé tolódik el. Emiatt a forgástengelynél lecsökken, a dugónál pedig megnő a nyomás. Vizsgáljuk meg először, hogy az üveg aljától x távolságra mekkora lesz a nyomás. Ehhez tekintsünk az üveg aljától x távolságra egy dx szélességű, $A(x)$ felületű levegődarabot, ahol $A(x)$ az üveg keresztmetszete az adott helyen. Mivel a szögsebességet lassan növeljük, így ez a levegődarab végig egyensúlyban lesz. A rá ható erőket felírva:

$$A(x) \cdot p(x + dx) = A(x) \cdot p(x) + dm \cdot x\omega^2, \quad (3.15)$$

ahol dm jelöli a légdarab tömegét. Ezt kifejezhetjük a sűrűségével és a térfogatával, mely esetünkben $dV = A(x) \cdot dx$. Így

$$A(x) \cdot p(x + dx) = A(x) \cdot p(x) + \rho A(x) \cdot dx \cdot x\omega^2. \quad (3.16)$$

Leosztva $A(x)$ -szel, a nyomáskülönbségeket egy oldalra rendezve, majd dx -szel is osztva:

$$\frac{p(x + dx) - p(x)}{dx} = \rho \cdot x\omega^2. \quad (3.17)$$

Ahogy dx -szel tartunk a nullába, az egyenlet bal oldalán éppen a nyomás x szerinti deriváltja jelenik meg:

$$\frac{dp}{dx} = \rho\omega^2 x. \quad (3.18)$$

Az egyetemes gáztörvényből a levegő sűrűsége:

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (3.19)$$

Ezt behelyettesítve (3.18)-ba:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\omega^2 M}{RT} p \cdot x. \quad (3.20)$$

Ez egy szeparálható differenciál-egyenlet, melynek megoldásához a változókat érdemes külön oldalra rendezni:

$$\frac{1}{p} dp = \frac{\omega^2 M}{RT} x dx. \quad (3.21)$$

Ezután az egyenlet mindkét oldalát integráljuk, ehhez érdemes a változókat máshogy elnevezni (pl. $\tilde{p}$, $\tilde{x}$), hogy a határokkal ne keverjük őket:

$$\int_{p_1}^p \frac{1}{\tilde{p}} d\tilde{p} = \int_0^x \frac{\omega^2 M}{RT} \tilde{x} d\tilde{x}. \quad (3.22)$$

Használjuk ki, hogy az üveg forgástengely felőli végénél a nyomás p_1 , és végezzük el az integrálást:

$$\ln \left(\frac{p}{p_1} \right) = \frac{\omega^2 M}{2RT} x^2. \quad (3.23)$$

Innen $p(x)$ kifejezhető:

$$p(x) = p_1 \cdot \exp \left(\frac{\omega^2 M}{2RT} x^2 \right). \quad (3.24)$$

Figyelembe véve, hogy a dugóra is hat centrifugális erő, felírhatjuk a kirepülés feltételét:

$$A \cdot p_1 \cdot \exp \left(\frac{\omega^2 M}{2RT} L^2 \right) + mL\omega^2 \geq S + p_k A. \quad (3.25)$$

Ismeretes, hogy ha $x \ll 1$, akkor használhatjuk az alábbi közelítést:

$$e^x \approx 1 + x. \quad (3.26)$$

Ezt, valamint a feladatban megadott közelítést felhasználva:

$$Ap_1 \left(1 + \frac{\omega^2 ML^2}{2RT} \right) + mL\omega^2 \geq S + p_k A. \quad (3.27)$$

Kiemelve ω^2 -et:

$$\omega^2 \left(\frac{Ap_1 ML^2 + 2mLRT}{2RT} \right) \geq S + A(p_k - p_1). \quad (3.28)$$

Innen a kritikus szögsebesség:

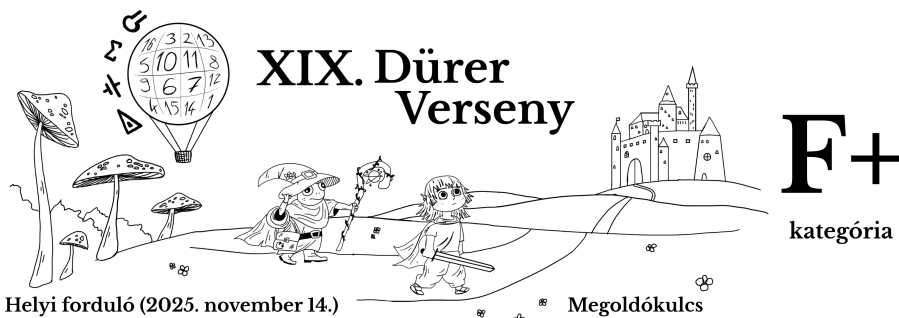
$$\omega = \sqrt{2RT} \cdot \sqrt{\frac{S + A(p_k - p_1)}{Ap_1 ML^2 + 2mLRT}}. \quad (3.29)$$

A forgástengelynél a levegő sűrűsége:

$$\varrho_1 = \frac{p_1 M}{RT}. \quad (3.30)$$

Ezt behelyettesítve:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2S + 2A(p_k - p_1)}{A\varrho_1 L^2 + 2mL}}}. \quad (3.31)$$



4. feladat

(a)

Rögzített atommag esetén a mozgás egyszerűbben leírható. Az alfa-részecske kezdetben közeledik a mag felé, ám a Coulomb-taszítás miatt ezt lassulás és irányváltoztatás kíséri. Egy ponton sebessége merőleges lesz a vonzócentrumhoz húzott sugárra – ekkor lesz a két test távolsága minimális –, majd gyorsulva távolodni kezd, és távozik a végtelenbe.

A minimális $d_{\min}$ távolság az energia- és perdületmegmaradás törvényei alapján határozható meg. Kezdetben az alfa-részecskének lényegében csak mozgási energiája van, a kérdéses időpillanat elérésekor ez részben elektrosztatikus kölcsönhatási energiává alakul:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 + \frac{kQq}{d_{\min}}. \quad (4.1)$$

Itt $v_{\min}$ a vizsgált időpillanatban elért minimális sebesség. A perdület kiszámításához felhasználhatjuk, hogy kezdetben a helyvektornak a sebességvektorra merőleges vetülete éppen a b impakt paraméter, a kérdéses pillanatban pedig a két vektor egymásra merőleges, ezáltal:

$$mbv = mv_{\min}d_{\min}. \quad (4.2)$$

A (4.2)-es képletből a $v_{\min}$ mennyiséget kifejezve, majd azt a (4.1)-es kifejezésbe behelyettesítve az alábbi másodfokú egyenletre jutunk:

$$d_{\min}^2 - \frac{2kQq}{mv^2}d_{\min} - b^2 = 0. \quad (4.3)$$

Ennek nemnegatív, azaz fizikai megoldása megadja a keresett távolságot:

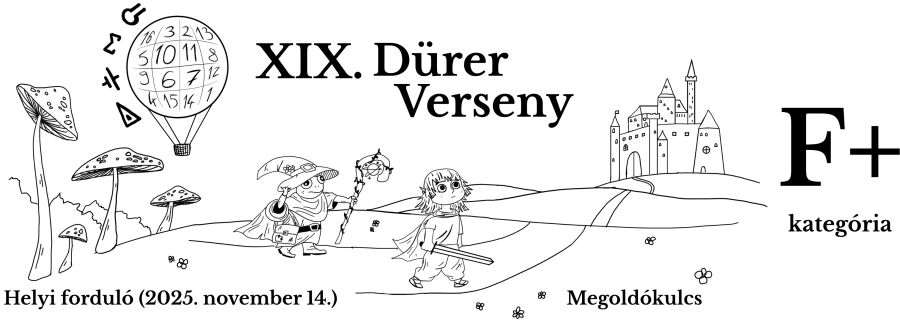
$$d_{\min} = \frac{kQq}{mv^2} + \sqrt{\left(\frac{kQq}{mv^2}\right)^2 + b^2}. \quad (4.4)$$

(b)

Rögzítetlen atommag esetén a mozgás valamivel bonyolultabb. A Coulomb-taszítás hatására az atommag is kimozdul kezdeti pozíciójából, ám eközben a rendszer tömegközéppontja végig egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Egy adott pillanatban, mikor a testek távolsága éppen d , a köztük ható Coulomb-erő kifejezhető, mint:

$$F = \frac{kQq}{d^2}. \quad (4.5)$$

Érdekes áttérni a tömegközépponthoz rögzített vontakoztatási rendszerbe, ahol az alfa-részecske kezdeti sebességének nagysága $v' = v - mv/(m + M) = Mv/(m + M)$, az impakt paraméter pedig $b' = Mb/(m + M)$. Ebben a rendszerben az F erő értelmezhető úgy is, mintha egy a tömegközéppontban álló Q' töltésű test fejtene ki vonzó hatást az alfa-részecskére. A



részecske tömegközépponttól való távolsága $d' = Md/(m + M)$, így a rá ható ekvivalens erő nagysága:

$$F = \frac{kQ'q}{d'^2} = \frac{(m + M)^2}{M^2} \frac{kQ'q}{d^2}. \quad (4.6)$$

Az (4.5) és (4.6) egyenletek összevetéséből a Q' töltés kifejezhető:

$$Q' = \frac{M^2}{(m + M)^2} Q. \quad (4.7)$$

Ezzel az egyszerűsített képpel problémánkat visszavezettük az (a) feladatrészben tárgyalt esetre, csupán a $Q \rightarrow Q'$, $v \rightarrow v'$, $b \rightarrow b'$ és $d_{\min} \rightarrow d'_{\min}$ cserét kell elvégeznünk. Korábbi összefüggéseinket felhasználva:

$$d'_{\min} = \frac{M}{m + M} d_{\min} = \frac{kQ'q}{mv'^2} + \sqrt{\left(\frac{kQ'q}{mv'^2}\right)^2 + b'^2} = \frac{kQq}{mv^2} + \sqrt{\left(\frac{kQq}{mv^2}\right)^2 + \left(\frac{Mb}{m + M}\right)^2}. \quad (4.8)$$

Bevezetve az $m^* = mM/(m + M)$ redukált tömeget, a minimális távolság korábbi (4.4) képletünkhöz igen hasonló alakot ölt:

$$d_{\min} = \frac{kQq}{m^*v^2} + \sqrt{\left(\frac{kQq}{m^*v^2}\right)^2 + b^2}. \quad (4.9)$$

Jól látható, hogy ez általában nagyobb, mint az (a) feladatrészben, ám közelítőleg visszakapjuk ugyanazt az eredményt, amennyiben $M \gg m$. A Rutherford-kísérletben használt aranyatommagok az alfa-részecskéknél csaknem ötvenszer nehezebbek, ráadásul egy kristályrács részeként ennél is nagyobb tehetetlenséggel rendelkeznek. Emiatt jó közelítéssel érvényesnek tekinthető a rögzített atommag egyszerűsítő feltevése.

5. feladat

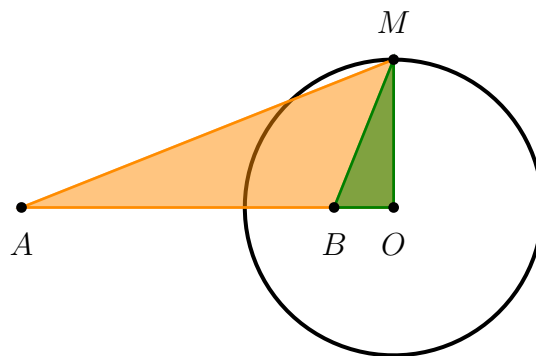
Az alábbiakban két lehetséges megoldási módszert is ismertetünk, melyek közül az első szimetriák és az elektromos fluxus definíciója segítségével, míg a második az erővonal-struktúra teljeskörű megismerése által ad választ a feladatban feltett kérdésre.

Első megoldás

A feladatban szereplő elrendezésben a szigetelőpálca által kifejtett elektromos erők megosztják a fémhenger könnyen mozgó töltéseit. Az egyensúlyi elrendezésben a fém felületi töltéseinek elektromos mezeje megegyezik egy, a henger tengelyétől $x = R^2/d$ távolságra elhelyezett $-\eta$ vonaltöltés mezejével. A probléma kvázi-kétdimenziós, így tekinthetjük egyetlen síkmetszetét, ahogy a feladat ábráján is tettük.

Jelölje O a fémhenger tengelyének, A a szigetelőpálcának, B pedig a tükörtöltésnek a vetületét; a keresett erővonal fémhengerbe való befutási pontja pedig legyen M . Utóbbi helyének

meghatározásához kihasználtuk, hogy az erővonalak a fémhengerbe mindig merőlegesen lépnek be. Az említett jelöléseket az 5.1. ábra foglalja össze. Ezen észrevehetjük, hogy az AOM és MOB derékszögű háromszögek egymáshoz hasonlóak, hiszen a tükörtlöltés-módszer következtében a befogók d/R és R/x arányai megegyeznek. Emiatt a nagyobb háromszög A csúcsnál lévő hegyesszöge megegyezik a kisebb háromszög M csúcsnál lévő szögével; jelölje ezt ϑ .



5.1. ábra. Az elrendezés síkmetszete, egyes nevezetes pontjaival és szögeivel.

A Gauss-törvény értelmében a szigetelőpálcából kilépő minden erővonal a fémhengerbe érkezik, miközben egymást nem metszik. Az erővonalak a pálcából izotrop módon lépnek ki, így a vizsgált görbe és annak tükörképe által bezárt elektromos fluxus:

$$\Phi = \frac{2\alpha}{2\pi} \cdot \frac{\eta}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha\eta}{\pi\varepsilon_0}. \quad (5.1)$$

A fémhengerbe beérkező ugyanekkora fluxus pedig kiszámítható a valódi és a tükörtlöltés járulékeinak összegeként. Ezek külön-külön szintén izotrop mezőt hoznak létre, így az 5.1. ábra alapján:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{2\vartheta}{2\pi} \cdot \frac{\eta}{\varepsilon_0} + \frac{2\vartheta + \pi}{2\pi} \cdot \frac{\eta}{\varepsilon_0} = \frac{(4\vartheta + \pi)\eta}{2\pi\varepsilon_0}. \quad (5.2)$$

Az (5.1) és (5.2) egyenleteket összevetve a keresett szög kifejezhető, mint $\alpha = \pi/2 + 2\vartheta$. Felhasználva továbbá, hogy az AOM háromszögében $\tan \vartheta = R/d$, adódik a végeredmény:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2 \arctg \left(\frac{R}{d} \right). \quad (5.3)$$

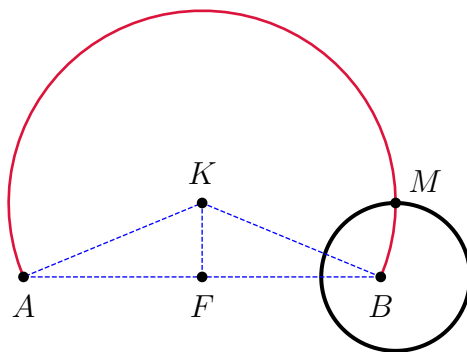
Várakozásainknak megfelelően a $d \gg R$ határesetet tekintve az $\alpha = \pi/2$ eredmény adódik, azaz ha a szigetelőpálca messze van a fémhengertől, akkor utóbbi R sugara elhanyagolhatóvá, és az elrendezés szimmetrikussá válik.

Második megoldás

A tükörtlöltés-módszer lehetőséget ad az erővonalak alakjának pontos meghatározására is. Megmutatható, hogy az η és $-\eta$ vonaltöltések potenciálja logaritmikus távolságfüggéssel rendelkezik. Így a valódi- és tükörtlöltések egy adott ekvipotenciális felületének vetülete azon pontok

mértani helye a síkon, amelynek az A és B pontoktól vett távolságaránya állandó. Ezek az úgynevezett Apollóniusz-körök. Az ezen körökre merőleges görbesereg, amely megegyezik az elrendezés erővonalaival, szintén körökből áll.

Feladatunk tehát innentől geometriai: egy olyan kört keresünk, amely tartalmazza az A , B és M pontokat, és utóbbi helyen érintője merőleges az O középpontú, R sugarú körre. Ezt szemlélteti a 5.2. ábra. Itt jól látható, hogy az AB szakasz F felezőpontja, és az erővonal, mint körív K középpontja éppen R távolságra fekszik egymástól. Emiatt az AFK háromszög A csúcsnál lévő hegyesszögére, amelyet jelölje φ , teljesül a $\operatorname{tg} \varphi = 2R/(d - R^2/d)$ összefüggés.



5.2. ábra. A kör alakú erővonalakra vonatkozó geometriai probléma képe.

Felhasználva, hogy a keresett szög $\alpha = \pi/2 + \varphi$, egyből megkapjuk a végeredményt:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{2Rd}{d^2 - R^2} \right)}. \quad (5.4)$$

Ez a végeredmény könnyen összhangba hozható az (5.3) egyenlettel, például a kétszeres szögek tangensére vonatkozó trigonometriai azonosság segítségével:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2Rd}{d^2 - R^2} = \frac{2R/d}{1 - (R/d)^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta} \implies \varphi = 2\vartheta. \quad (5.5)$$

Megjegyzés

A feladatban felhasznált fizikai összefüggések mélyebb megértéséhez (különös tekintettel a tükörtöltések módszerére és a kvázi-kétdimenziós elektromágneses problémákra) hasznosak lehetnek a XVII. Dürer Verseny F+ kategóriájának helyi 4. és döntő 5. feladatai, a 2016-os Eötvös-verseny 3. feladata, vagy pedig Richard Feynman *Mai fizika* könyvsorozatának 5. és 6. kötetei.