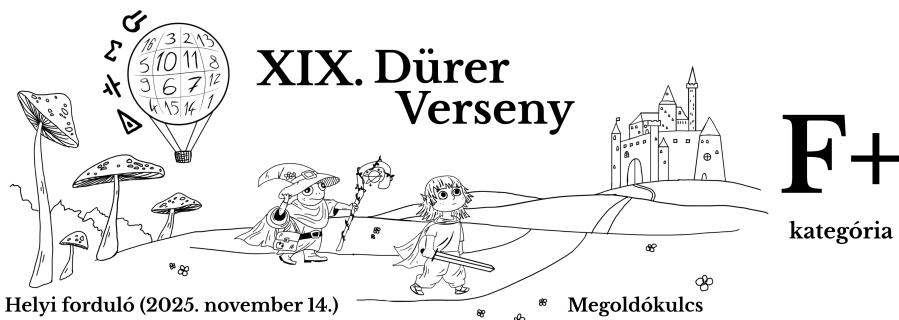




## 1. feladat

Vizsgáljuk meg a gyűrű egy kicsiny, az egyensúly beálltakor  $x_1$  hosszúságú szakaszát. Ennek a szakasznak a feléhez egy

$$\varphi = \frac{2\pi x_1}{2 \cdot 2\pi R_1} = \frac{x_1}{2R_1} \quad (1.1)$$

középponti szög tartozik, ahol  $R_1$  a gumi megnyúlt állapotához tartozó sugara. Legyen  $F$  a vizsgált darabra az egyik oldalról ható erő. Mivel a gumi már nem nyúlik tovább, és nem is gyorsul, így a másik oldalról is  $F$  erő hat a kis szakaszra. Ebből adódóan a darabkára ható eredő erőnek csak sugárirányú komponense van. Ez fogja biztosítani a szükséges centripetális gyorsulást a körpályán maradáshoz. Tehát felírhatjuk, hogy

$$dm \cdot \omega^2 R_1 = F_e, \quad (1.2)$$

ahol  $dm$  a kis darabka tömege,  $F_e$  pedig az arra ható eredő erő nagysága, melynek értékét az oldalról ható  $F$  erők sugárirányú komponenseinek összege adja:

$$F_e = 2F \sin \varphi \approx 2F \varphi = \frac{F x_1}{R_1}. \quad (1.3)$$

A kis szakasz tömege felírható az alábbi módon:

$$dm = \frac{m x_1}{2\pi R_1}. \quad (1.4)$$

Ekkor az (1.2), (1.3) és (1.4)-es egyenletek felhasználásával már meghatározhatjuk  $F$  nagyságát:

$$F = \frac{m \omega^2 R_1}{2\pi}. \quad (1.5)$$

Most határozzuk meg a kis darabka rugóállandóját. Ehhez írjuk fel a Hook-törvényt a teljes gumira, illetve a kiszemelt kis gumidarabra:

$$D_x dx = D ds, \quad (1.6)$$

ahol  $dx$  és  $ds$  a kiszemelt darabka, illetve a teljes gumi megnyúlása;  $D_x$  és  $D$  pedig rendre ezek rugóállandója. Felhasználva, hogy a gumiban ébredő erő csak a relatív megnyúlástól függ (mely állandó a gumi mentén), felírhatjuk hogy

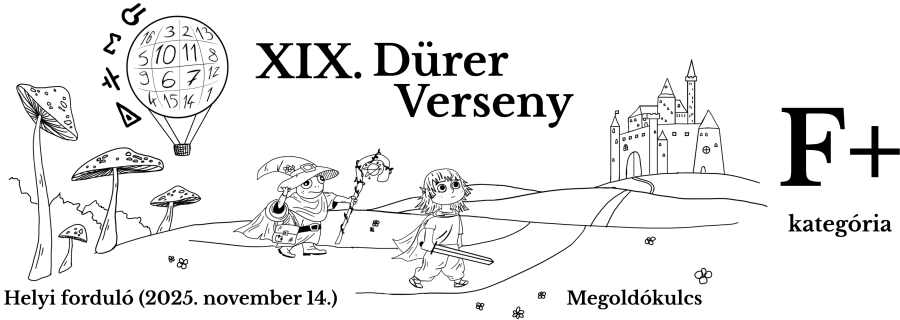
$$D_x x_0 \frac{dx}{x_0} = D 2\pi R_0 \frac{ds}{2\pi R_0}, \quad (1.7)$$

ahol  $x_0$  a kis szakasz eredeti (nyújtatlan) hossza. Felhasználva a relatív megnyúlás definícióját:

$$\frac{dx}{x_0} = \frac{ds}{2\pi R_0}. \quad (1.8)$$

Innen pedig

$$D_x = D \frac{2\pi R_0}{x_0} = D \frac{2\pi R_1}{x_1} \quad (1.9)$$



adódik, hiszen a gumi mindenhol egyenletesen nyúlik meg, így  $R_0/x_0 = R_1/x_1$  (mivel a kis darabhoz végig ugyanakkora középponti szög tartozik). Így már a kis szakasz eredeti hosszához képest vett  $\Delta x = x_1 - x_0$  megnyúlása kiszámítható:

$$\Delta x = \frac{F}{D_x} = \frac{m\omega^2 R_1}{2\pi} \cdot \frac{x_1}{2\pi R_1 D} = \frac{m\omega^2}{4\pi^2 D} \cdot x_1. \quad (1.10)$$

Ebből a teljes gumi  $\Delta s$  megnyúlására felhasználva, hogy a relatív megnyúlás az egész gumi mentén állandó

$$\Delta s = \frac{m\omega^2}{4\pi^2 D} \cdot 2\pi R_1 = \frac{m\omega^2 R_1}{2\pi D} \quad (1.11)$$

adódik. Nyilván

$$s_0 = 2\pi R_0, \quad (1.12)$$

valamint

$$s_0 + \Delta s = 2\pi (R_0 + \Delta R), \quad (1.13)$$

ahol  $s_0$  a gumi anyagának eredeti hossza és  $\Delta R$  a gumi sugarának a változása a nyújtatlan állapothoz képest. Így a sugár változása

$$\Delta R = \frac{\Delta s}{2\pi} = \frac{m\omega^2 R_1}{4\pi^2 D}. \quad (1.14)$$

Mivel az adott  $\omega$ -hoz tartozó sugár  $R_1 = R_0 + \Delta R$ , így

$$\Delta R = \frac{m\omega^2}{4\pi^2 D} (R_0 + \Delta R), \quad (1.15)$$

amit  $\Delta R$ -re rendezve a

$$\Delta R = \frac{m\omega^2 R_0}{4\pi^2 D - m\omega^2} \quad (1.16)$$

összefüggésre jutunk, amelyhez  $R_0$ -t hozzáadva megkapjuk az adott  $\omega$ -hoz tartozó sugarat

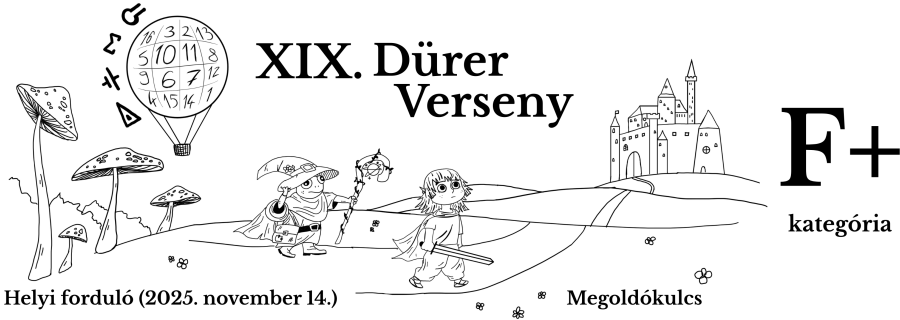
$$R_1 = R_0 + \frac{m\omega^2 R_0}{4\pi^2 D - m\omega^2} = \frac{4\pi^2 D}{4\pi^2 D - m\omega^2} R_0. \quad (1.17)$$

*Megjegyzés:* A feladatot az energiaminimum elvével is meg lehet oldani. Ehhez érdemes bevezetni a  $J$  összperdületet, mely a keresett stacionárius állapotban az  $\omega$  szögsebességhez és a gumi alakját leíró  $R$  sugárhoz tartozik (és az összes többi vizsgált állapothoz, mivel egy virtuális sugárváltozás okozta megnyúlás során a perdület megmarad):

$$J = mR_1^2\omega(R_1) = mR^2\omega(R),$$

$$E(R) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\Delta s^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega(R)^2 + \frac{1}{2}D\Delta s(R)^2 = \frac{1}{2}\frac{J^2}{mR^2} + \frac{1}{2}D\Delta s(R)^2.$$

Ezt követően  $E(R)$  minimumát megkeresve ( $dE/dR = 0$ ) majd felhasználva, hogy ezen értéket  $R = R_1$  esetén veszi fel szintén az (1.17) eredményre jutunk. Ezeket követően a  $d^2E/d^2R$  deriváltat is kiszámíthatjuk, ha az elrendezés stabilitását szeretnénk megvizsgálni.



## 2. feladat

Először számoljuk ki a bolygó középpontja felett  $z$  magasságban a gravitációs gyorsulás nagyságát! Mivel a bolygó  $h$  magassága sokkal kisebb a sugaránál, tekinthetjük azt egy vékony körlemeznek. Vizsgáljuk meg, hogy egy  $m$  tömegű testre mekkora erő hat! Vegyünk a középponttól  $r$  távolságra egy  $dr$  szélességű körgyűrűt, ennek össztömege  $dM$ . A szimmetria miatt a vízszintes erőkomponens zérus. A  $z$  irányú erő:

$$dF_z = \frac{Gm \cdot dM}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (2.1)$$

ahol a második tényező az erő és a függőleges tengely által bezárt szög koszinusza. A gyűrű tömegét kifejezhetjük a bolygó sűrűségét felhasználva:

$$dM = \rho h [(r + dr)^2 \pi - r^2 \pi] \approx 2\pi \rho h r dr. \quad (2.2)$$

Ezt behelyettesítve

$$dF_z = \frac{2\pi r h \rho m G}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr \quad (2.3)$$

adódik. A teljes henger által kifejtett erőt integrálással kaphatjuk meg:

$$F_z(z) = m g_z(z) = 2\pi h \rho m G z \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr. \quad (2.4)$$

Az integrál kiszámolása és egyenletrendezés után:

$$g_z(z) = 2\pi h \rho G z \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R \quad (2.5)$$

adódik, amibe a határokat behelyettesítve:

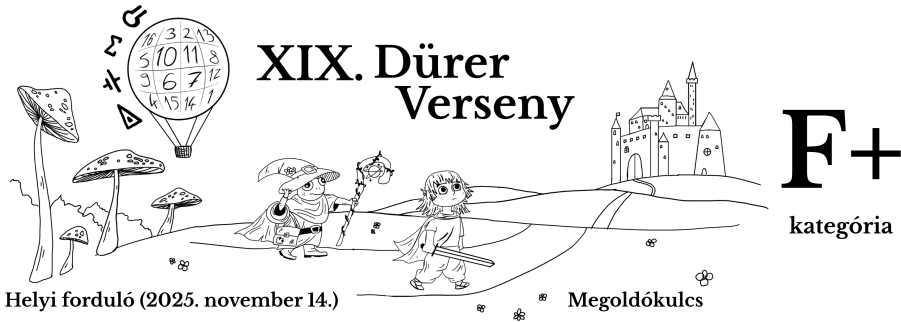
$$g_z(z) = 2\pi h \rho G \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (2.6)$$

A következő lépésben ki szeretnénk számolni a gravitációs gyorsulás sugárirányú komponensét a bolygó középpontján átmenő függőleges  $z$  tengelyhez közel. Ehhez ki kell használnunk, hogy a gravitációs mező forrásmentes a bolygón kívül, tehát egy térfogat felszínein be- és kiáramló fluxus nulla. Vegyünk egy vékony  $dz$  magasságú,  $r$  sugarú hengert  $z_0 \geq h/2$  magasságban, melynek tengelye egybeesik a bolygó tengelyével. Ekkor a következő összefüggést írhatjuk fel a  $g_z(z)$  és  $g_r(r, z)$  komponensek közt:

$$g_z(z_0 + dz) \cdot r^2 \pi + g_r(r, z_0) \cdot 2\pi r dz = g_z(z_0) \cdot r^2 \pi. \quad (2.7)$$

Átrendezve az egyenletet:

$$-r^2 \pi [g_z(z_0 + dz) - g_z(z_0)] = 2\pi r \cdot g_r(r, z_0) \cdot dz. \quad (2.8)$$



Ahogy  $dz$ -vel tartunk nullához, bal oldalon megjelenik  $g_z$   $z$  szerinti deriváltja:

$$g_r(r, z_0) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dg_z}{dz} \Big|_{z=z_0}. \quad (2.9)$$

Behelyettesítve a (2.6)-os egyenlet eredményét, és a deriválást elvégezve:

$$g_r(r, z_0) = \frac{r}{2} \cdot 2\pi h \varrho G \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} - \frac{z_0^2}{(R^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (2.10)$$

Innen rendezés után:

$$g_r(r, z_0) = r \frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.11)$$

Mivel feltettük, hogy a kerekasztal méretei jóval kisebbek a Düránusz méreteinél, a sörök mozgásának leírásakor használható a  $z_0 = h/2$  összefüggés. Látható, hogy a gyorsulás egyenesen arányos lesz a kitéréssel, és ellentétes irányú azzal, hiszen a gravitációs erő mindig vonzó.

Számoljuk ki, hogy Lancelot mennyi idő alatt juttatja a korsót az asztal túloldalára. A körmozgás feltétele a kezdeti pillanatban, ha az asztal sugara  $r_a$ :

$$m\omega_L^2 r_a = m r_a \frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.12)$$

Mivel az erő a kerület mentén végig állandó nagyságú, így valóban egyenletes körmozgást végez a korsó. A szögsebesség:

$$\omega_L = \sqrt{\frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}}. \quad (2.13)$$

Egy félkör megtételéhez szükséges idő:

$$t_L = \frac{\pi}{\omega_L} = \sqrt{\frac{\pi(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}{h \varrho R^2 G}} \approx \sqrt{\frac{\pi R}{h \varrho G}}. \quad (2.14)$$

Most számoljuk ki Artúr esetén is a túloldalra jutás idejét. A mozgásegyenlet ekkor:

$$a_r = -\frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}} r. \quad (2.15)$$

Látszik, hogy a mozgásegyenlet egy harmonikus rezgőmozgásra vezet a következő körfrekvenenciával:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{\pi h \varrho R^2 G}{(R^2 + h^2/4)^{\frac{3}{2}}}}. \quad (2.16)$$

Észrevehető, hogy  $\omega_L = \omega_A$ . Továbbá a keresett idő Artúr esetén szintén egy fél periódus megtételéhez tartozik, így:

$$t_A = \frac{\pi}{\omega_A} = t_L \approx \sqrt{\frac{\pi R}{h \varrho G}}. \quad (2.17)$$

Tehát Artúr és Lancelot söröi azonos idő alatt jutnak az asztal átellenes oldalára.

### 3. feladat

(a)

Ahogy kirázzuk a  $\text{CO}_2$ -t a palackból, folyamatosan nő a gáztérben található részecskék száma, tehát a nyomás is, egészen addig, amíg ki nem repül a palackból a dugó. Vizsgáljuk azt az állapotot, amikor a dugó már majdnem elhagyta a palack száját. A kirepülés feltétele:

$$p_a A \geq mg + S + p_k A, \quad (3.1)$$

ahol  $p_a$  a gáz nyomása a kritikus helyzetben. Ezt kifejezve:

$$p_a = \frac{mg + S}{A} + p_k. \quad (3.2)$$

A kezdeti és a kritikus állapotokra felírhatjuk az egyetemes gáztörvényt:

$$p_0 V_0 = n_0 RT, \quad (3.3)$$

$$p_a V_a = n_a RT, \quad (3.4)$$

ahol  $n_0$  a kezdetben,  $n_a$  pedig a kritikus pillanatban a gáztérben található gázmolekulák (először levegő, utána levegő és  $\text{CO}_2$ ) anyagmennyisége. A (3.4)-es egyenletből  $p_a$ -t kifejezve:

$$p_a = \frac{n_a RT}{V_a}. \quad (3.5)$$

Ezt behelyettesítve (3.2)-be:

$$\frac{n_a RT}{V_a} = \frac{mg + S}{A} + p_k. \quad (3.6)$$

Innen  $n_a$ -t kifejezve:

$$n_a = \frac{V_a}{RT} \left( \frac{mg + S}{A} + p_k \right). \quad (3.7)$$

A pezsgőből kiszabadult  $\text{CO}_2$  anyagmennyisége:

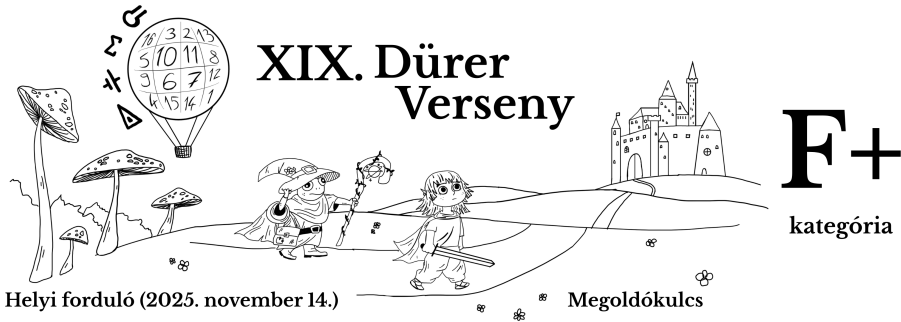
$$\Delta n = \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}, \quad (3.8)$$

ahol  $\Delta m$  a kiszabadult  $\text{CO}_2$  tömege. Ez alapján a kritikus pillanatban a gázmolekulák anyagmennyisége:

$$n_a = n_0 + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}. \quad (3.9)$$

A (3.3)-as egyenletből  $n_0$  értékét beírva:

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT} + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}. \quad (3.10)$$



Ezt visszaírva (3.7)-be:

$$\frac{p_0 V_0}{RT} + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}} = \frac{V_a}{RT} \left( \frac{mg + S}{A} + p_k \right). \quad (3.11)$$

A dugó kiszabadulása miatti térfogatváltozás alapján  $V_a$ :

$$V_a = V_0 + Ad. \quad (3.12)$$

Ezt behelyettesítve (3.11)-be, átrendezéssel megkapható  $\Delta m$ :

$$\Delta m = \frac{M_{\text{CO}_2}}{RT} \left( \frac{V_0 + Ad}{A} (mg + S) + p_k (V_0 + Ad) - p_0 V_0 \right). \quad (3.13)$$

Ezt felírhatjuk  $\eta m_0$  alakban is, ahol  $\eta$  a keresett arány. Innen  $\eta$ -t kifejezve:

$$\boxed{\eta = \frac{M_{\text{CO}_2}}{m_0 RT} \left( \frac{V_0 + Ad}{A} (mg + S) + p_k (V_0 + Ad) - p_0 V_0 \right)}. \quad (3.14)$$

(b)

Érdekes a problémát az üveghez rögzített koordináta-rendszerből vizsgálni. Ebben a rendszerben a levegőre a forgás miatt centrifugális erő hat, így a légtömeg a dugó felé tolódik el. Emiatt a forgástengelynél lecsökken, a dugónál pedig megnő a nyomás. Vizsgáljuk meg először, hogy az üveg aljától  $x$  távolságra mekkora lesz a nyomás. Ehhez tekintsünk az üveg aljától  $x$  távolságra egy  $dx$  szélességű,  $A(x)$  felületű levegődarabot, ahol  $A(x)$  az üveg keresztmetszete az adott helyen. Mivel a szögsebességet lassan növeljük, így ez a levegődarab végig egyensúlyban lesz. A rá ható erőket felírva:

$$A(x) \cdot p(x + dx) = A(x) \cdot p(x) + dm \cdot x\omega^2, \quad (3.15)$$

ahol  $dm$  jelöli a légdarab tömegét. Ezt kifejezhetjük a sűrűségével és a térfogatával, mely esetünkben  $dV = A(x) \cdot dx$ . Így

$$A(x) \cdot p(x + dx) = A(x) \cdot p(x) + \rho A(x) \cdot dx \cdot x\omega^2. \quad (3.16)$$

Leosztva  $A(x)$ -szel, a nyomáskülönbségeket egy oldalra rendezve, majd  $dx$ -szel is osztva:

$$\frac{p(x + dx) - p(x)}{dx} = \rho \cdot x\omega^2. \quad (3.17)$$

Ahogy  $dx$ -szel nullához tartunk, az egyenlet bal oldalán éppen a nyomás  $x$  szerinti deriváltja jelenik meg:

$$\frac{dp}{dx} = \rho\omega^2 x. \quad (3.18)$$

Az egyetemes gáztörvényből a levegő sűrűsége:

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (3.19)$$

Ezt behelyettesítve (3.18)-ba:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\omega^2 M}{RT} p \cdot x. \quad (3.20)$$

Ez egy szeparálható differenciál-egyenlet, melynek megoldásához a változókat érdemes külön oldalra rendezni:

$$\frac{1}{p} dp = \frac{\omega^2 M}{RT} x dx. \quad (3.21)$$

Ezután az egyenlet mindkét oldalát integráljuk, ehhez érdemes a változókat máshogy elnevezni (pl.  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{x}$ ), hogy a határokkal ne keverjük őket:

$$\int_{p_1}^p \frac{1}{\tilde{p}} d\tilde{p} = \int_0^x \frac{\omega^2 M}{RT} \tilde{x} d\tilde{x}. \quad (3.22)$$

Használjuk ki, hogy az üveg forgástengely felőli végénél a nyomás  $p_1$ , és végezzük el az integrálást:

$$\ln \left( \frac{p}{p_1} \right) = \frac{\omega^2 M}{2RT} x^2. \quad (3.23)$$

Innen  $p(x)$  kifejezhető:

$$p(x) = p_1 \cdot \exp \left( \frac{\omega^2 M}{2RT} x^2 \right). \quad (3.24)$$

Figyelembe véve, hogy a dugóra is hat centrifugális erő, felírhatjuk a kirepülés feltételét:

$$A \cdot p_1 \cdot \exp \left( \frac{\omega^2 M}{2RT} L^2 \right) + m \left( L + \frac{d}{2} \right) \omega^2 \geq S + p_k A. \quad (3.25)$$

Ismeretes, hogy ha  $x \ll 1$ , akkor használhatjuk az alábbi közelítést:

$$e^x \approx 1 + x. \quad (3.26)$$

Ezt, valamint a feladatban megadott közelítést felhasználva:

$$Ap_1 \left( 1 + \frac{\omega^2 ML^2}{2RT} \right) + m \left( L + \frac{d}{2} \right) \omega^2 \geq S + p_k A. \quad (3.27)$$

Kiemelve  $\omega^2$ -et:

$$\omega^2 \left( \frac{Ap_1 ML^2 + 2m \left( L + \frac{d}{2} \right) RT}{2RT} \right) \geq S + A(p_k - p_1). \quad (3.28)$$

Innen a kritikus szögsebesség:

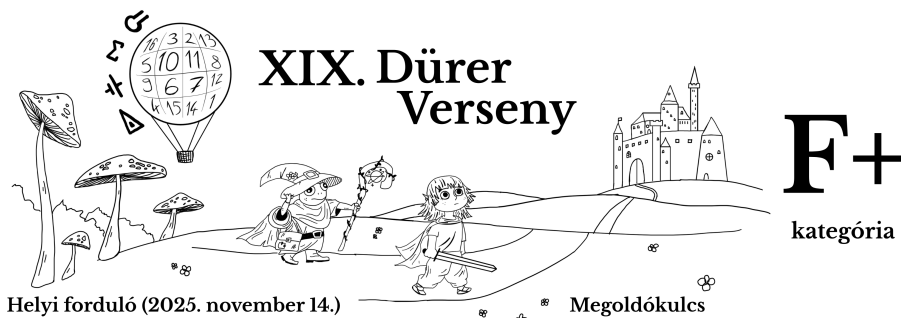
$$\omega = \sqrt{2RT} \cdot \sqrt{\frac{S + A(p_k - p_1)}{Ap_1 ML^2 + 2m \left( L + \frac{d}{2} \right) RT}}. \quad (3.29)$$

A forgástengelynél a levegő sűrűsége:

$$\varrho_1 = \frac{p_1 M}{RT}. \quad (3.30)$$

Ezt behelyettesítve:

$$\omega = \sqrt{\frac{2S + 2A(p_k - p_1)}{A\varrho_1 L^2 + 2m \left( L + \frac{d}{2} \right)}}. \quad (3.31)$$



## 4. feladat

(a)

Rögzített atommag esetén a mozgás egyszerűbben leírható. Az alfa-részecske kezdetben közeledik a mag felé, ám a Coulomb-taszítás miatt ezt lassulás és irányváltoztatás kíséri. Egy ponton sebessége merőleges lesz a vonzócentrumhoz húzott sugárra – ekkor lesz a két test távolsága minimális –, majd gyorsulva távolodni kezd, és távozik a végtelenbe.

A minimális  $d_{\min}$  távolság az energia- és perdületmegmaradás törvényei alapján határozható meg. Kezdetben az alfa-részecskének lényegében csak mozgási energiája van, a kérdéses időpillanat elérésekor ez részben elektrosztatikus kölcsönhatási energiává alakul:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 + \frac{kQq}{d_{\min}}. \quad (4.1)$$

Itt  $v_{\min}$  a vizsgált időpillanatban elért minimális sebesség. A perdület kiszámításához felhasználhatjuk, hogy kezdetben a helyvektornak a sebességvektorra merőleges vetülete éppen a  $b$  impakt paraméter, a kérdéses pillanatban pedig a két vektor egymásra merőleges, ezáltal:

$$mbv = mv_{\min}d_{\min}. \quad (4.2)$$

A (4.2)-es képletből a  $v_{\min}$  mennyiséget kifejezve, majd azt a (4.1)-es kifejezésbe behelyettesítve az alábbi másodfokú egyenletre jutunk:

$$d_{\min}^2 - \frac{2kQq}{mv^2}d_{\min} - b^2 = 0. \quad (4.3)$$

Ennek nemnegatív, azaz fizikai megoldása megadja a keresett távolságot:

$$d_{\min} = \frac{kQq}{mv^2} + \sqrt{\left(\frac{kQq}{mv^2}\right)^2 + b^2}. \quad (4.4)$$

(b)

Rögzítetlen atommag esetén a mozgás valamivel bonyolultabb. A Coulomb-taszítás hatására az atommag is kimozdul kezdeti pozíciójából, ám eközben a rendszer tömegközéppontja végig egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Egy adott pillanatban, mikor a testek távolsága éppen  $d$ , a köztük ható Coulomb-erő kifejezhető, mint:

$$F = \frac{kQq}{d^2}. \quad (4.5)$$

Érdekes áttérni a tömegközépponthoz rögzített vontakoztatási rendszerbe, ahol az alfa-részecske kezdeti sebességének nagysága  $v' = v - mv/(m + M) = Mv/(m + M)$ , az impakt paraméter pedig  $b' = Mb/(m + M)$ . Ebben a rendszerben az  $F$  erő értelmezhető úgy is, mintha egy a tömegközéppontban álló  $Q'$  töltésű test fejtene ki vonzó hatást az alfa-részecskére. A

részecske tömegközépponttól való távolsága  $d' = Md/(m + M)$ , így a rá ható ekvivalens erő nagysága:

$$F = \frac{kQ'q}{d'^2} = \frac{(m + M)^2}{M^2} \frac{kQ'q}{d^2}. \quad (4.6)$$

Az (4.5) és (4.6) egyenletek összevetéséből a  $Q'$  töltés kifejezhető:

$$Q' = \frac{M^2}{(m + M)^2} Q. \quad (4.7)$$

Ezzel az egyszerűsített képpel problémánkat visszavezettük az (a) feladatrészben tárgyalt esetre, csupán a  $Q \rightarrow Q'$ ,  $v \rightarrow v'$ ,  $b \rightarrow b'$  és  $d_{\min} \rightarrow d'_{\min}$  cseréket kell elvégeznünk. Korábbi összefüggéseinket felhasználva:

$$d'_{\min} = \frac{M}{m + M} d_{\min} = \frac{kQ'q}{mv'^2} + \sqrt{\left(\frac{kQ'q}{mv'^2}\right)^2 + b'^2} = \frac{kQq}{mv^2} + \sqrt{\left(\frac{kQq}{mv^2}\right)^2 + \left(\frac{Mb}{m + M}\right)^2}. \quad (4.8)$$

Bevezetve az  $m^* = mM/(m + M)$  redukált tömeget, a minimális távolság korábbi (4.4) képletünkhöz igen hasonló alakot ölt:

$$d_{\min} = \frac{kQq}{m^*v^2} + \sqrt{\left(\frac{kQq}{m^*v^2}\right)^2 + b^2}. \quad (4.9)$$

Jól látható, hogy ez általában nagyobb, mint az (a) feladatrészben, ám közelítőleg visszakapjuk ugyanazt az eredményt, amennyiben  $M \gg m$ . A Rutherford-kísérletben használt aranyatommagok az alfa-részecskéknél csaknem ötvenszer nehezebbek, ráadásul egy kristályrács részeként ennél is nagyobb tehetetlenséggel rendelkeznek. Emiatt jó közelítéssel érvényesnek tekinthető a rögzített atommag egyszerűsítő feltevése.

## 5. feladat

Az alábbiakban két lehetséges megoldási módszert is ismertetünk, melyek közül az első szimetriák és az elektromos fluxus definíciója segítségével, míg a második az erővonal-struktúra teljeskörű megismerése által ad választ a feladatban feltett kérdésre.

### Első megoldás

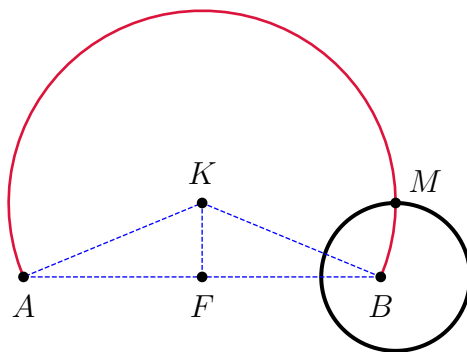
A feladatban szereplő elrendezésben a szigetelőpálca által kifejtett elektromos erők megosztják a fémhenger könnyen mozgó töltéseit. Az egyensúlyi elrendezésben a fém felületi töltéseinek elektromos mezeje megegyezik egy, a henger tengelyétől  $x = R^2/d$  távolságra elhelyezett  $-\eta$  vonaltöltés mezejével. A probléma kvázi-kétdimenziós, így tekinthetjük egyetlen síkmetszetét, ahogy a feladat ábráján is tettük.

Jelölje  $O$  a fémhenger tengelyének,  $A$  a szigetelőpálcának,  $B$  pedig a tükörtöltésnek a vetületét; a keresett erővonal fémhengerbe való befutási pontja pedig legyen  $M$ . Utóbbi helyének



mértani helye a síkon, amelynek az  $A$  és  $B$  pontoktól vett távolságaránya állandó. Ezek az úgynevezett Apollóniusz-körök. Az ezen körökre merőleges görbesereg, amely megegyezik az elrendezés erővonalaival, szintén körökből áll.

Feladatunk tehát innentől geometriai: egy olyan kört keresünk, amely tartalmazza az  $A$ ,  $B$  és  $M$  pontokat, és utóbbi helyen érintője merőleges az  $O$  középpontú,  $R$  sugarú körre. Ezt szemlélteti az 5.2. ábra. Itt jól látható, hogy az  $AB$  szakasz  $F$  felezőpontja, és az erővonal, mint körív  $K$  középpontja éppen  $R$  távolságra fekszik egymástól. Emiatt az  $AFK$  háromszög  $A$  csúcsnál lévő hegyesszögére, amelyet jelölje  $\varphi$ , teljesül a  $\operatorname{tg} \varphi = 2R/(d - R^2/d)$  összefüggés.



5.2. ábra. A kör alakú erővonalakra vonatkozó geometriai probléma képe.

Felhasználva, hogy a keresett szög  $\alpha = \pi/2 + \varphi$ , egyből megkapjuk a végeredményt:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{2Rd}{d^2 - R^2} \right)}. \quad (5.4)$$

Ez a végeredmény könnyen összhangba hozható az (5.3) egyenlettel, például a kétszeres szögek tangensére vonatkozó trigonometriai azonosság segítségével:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2Rd}{d^2 - R^2} = \frac{2R/d}{1 - (R/d)^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta} \implies \varphi = 2\vartheta. \quad (5.5)$$

### Megjegyzés

A feladatban felhasznált fizikai összefüggések mélyebb megértéséhez (különös tekintettel a tükörtöltések módszerére és a kvázi-kétdimenziós elektromágneses problémákra) hasznosak lehetnek a XVII. Dürer Verseny F+ kategóriájának helyi 4. és döntő 5. feladatai, a 2016-os Eötvös-verseny 3. feladata, vagy pedig Richard Feynman *Mai fizika* könyvsorozatának 5. és 6. kötetei.