

B1. Áron felvágott egy 12 cm oldalú szabályos háromszöget néhány olyan kisebb szabályos háromszögre, amelyeknek az oldalai cm-ben mérve egész számok. Ezután megsámolta, hogy hány részre darabolta fel a háromszöget. Milyen számot kaphatott Áron? Mutassatok példát minél több 1-nél nagyobb, de 11-nél kisebb számra.

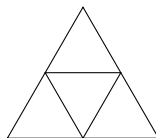
A feldarabolt részek közt lehetnek azonos és különböző méretűek is.

Ha egy számról úgy gondoljátok, hogy lehetséges, akkor mutassatok egy lehetséges példát a darabolásra. Ha úgy gondoljátok, hogy egy számra nem létezik példa, akkor azt nem kell megindokolnotok, hogy szerintetek miért nem létezik.

Megoldás: Vegyük észre, hogy mivel Áron legalább két szabályos háromszögre darabolta az eredeti háromszöget, így bármely rész legfeljebb 1 csúcsát tartalmazhatja az eredeti háromszögnek, különben a darab maga az egész háromszög lenne. Így minden rész legfeljebb 1 csúcsot tartalmaz az eredeti háromszög 3 csúcsából, tehát legalább 3 darab részre kellett a szabályos háromszöget darabolni.

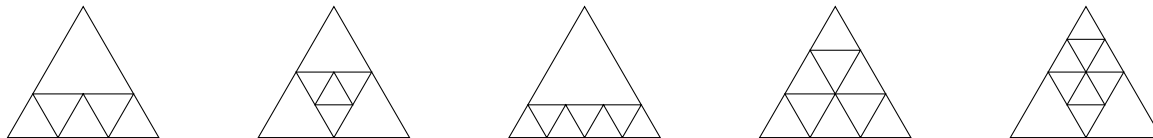
3 szabályos háromszögre se darabolhatta Áron a háromszöget, ekkor az előző érvelés miatt a három háromszög mindegyike tartalmazza a háromszög egy csúcsát. Az egyik oldalt nézve, az oldal két csúcsához tartozó szabályos háromszögeknek kell fednie az oldalt, különben még legalább egy háromszöggel (ami nem lehet a harmadik csúcsnál lévő háromszög) kellene lefedni az oldalt. Ahol összeérnek az oldalt fedő háromszögek, azt a pontot még legalább egy háromszögnek kell fednie, ami szintén nem lehet a harmadik csúcsnál lévő háromszög, vagyis három háromszögre nem darabolhatta Áron.

4 szabályos háromszögre könnyen láthatjuk, hogy bonthatta Áron a szabályos háromszöget:

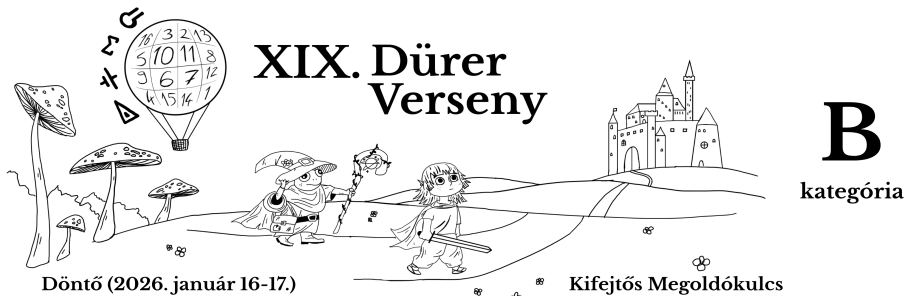


5 szabályos háromszögre nem darabolhatta Áron a szabályos háromszöget. Ha minden csúcsot egy-egy 6 cm oldalhosszú szabályos háromszöggel fedünk, akkor megkapjuk a 4 háromszöges konstrukciót, így még a középen lévő szabályos háromszöget kellene két szabályos háromszögre bontani, amit már láttunk, hogy lehetetlen. Ha nem minden csúcsnál egy 6 cm oldalhosszú háromszög van, akkor az egyik oldal pontjai nincsenek teljesen fedve, ehhez kell még legalább egy háromszög és ahol ezek a háromszögek érintkeznek, ott kell még legalább két háromszög. Ez az öt háromszög semelyike se lehet a harmadik csúcsot fedő szabályos háromszög, ekkor kellene legalább hat háromszög. Vagyis öt szabályos háromszögre nem darabolhatott Áron.

A maradék 6, 7, 8, 9 és 10 szabályos háromszögre darabolás lehetőségességét az alábbi ábrákon láthatjuk:



Tehát Áron a 4, 6, 7, 8, 9 vagy 10 számokat kaphatta.



B2. Felírtunk a táblára 3 számot: 6, 21, 42. Egy lépésben letörölünk egy számot a tábláról, a helyére pedig egy olyan egész számot írunk, ami a táblán maradt két szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa, amennyiben az pozitív egész. Tehát ha a táblán az a és b számok maradtak fent, akkor az újonnan felírt szám az $a + b$, $a - b$, $b - a$, $a \cdot b$, a/b , b/a számok valamelyike lehet.

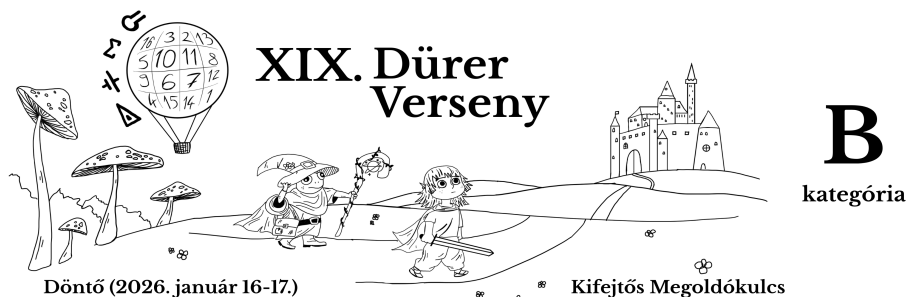
a) Elérhető-e, hogy a táblán a 3, 6, 12 számok szerepeljenek?

b) Elérhető-e néhány lépés után az 5, 11, 16?

A táblán nem számít a számok sorrendje. Ha egy számhármast elérhetőnek gondoltok, akkor adjatok meg egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel el lehet oda jutni. Amennyiben azt gondoljátok, hogy egy számhármast nem elérhető, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem az.

Megoldás: a) Nem érhető el tetszőleges lépésszám után sem. Ugyanis ha elérhető lenne, akkor a táblán szereplő valamelyik két szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa lenne a harmadik szám. Ha az utolsóként felírt szám a 12, akkor ezt a 3-ból és a 6-ból kellett kapnunk, ami nem lehet, csak a $3 + 6 = 9$, $6 - 3 = 3$, $3 \cdot 6 = 18$ és a $6/3 = 2$ számokat írhattuk volna fel. Ha az utolsóként felírt szám a 6, akkor ezt a 3-ból és a 12-ből kellett kapnunk, ami nem lehet, csak a $3 + 12 = 15$, $12 - 3 = 9$, $3 \cdot 12 = 36$ és a $12/3 = 4$ számokat írhattuk volna fel. Ha az utolsóként felírt szám a 3, akkor ezt a 6-ból és a 12-ből kellett kapnunk, ami nem lehet, csak a $6 + 12 = 18$, $12 - 6 = 6$, $6 \cdot 12 = 72$ és a $12/6 = 2$ számokat írhattuk volna fel. Tehát nem érhető el, mert egyik esetben sem kaphattuk meg a harmadik számot.

b) Elérhető a következő módon. Első lépésben letöröljük a 42-t és felírjuk a 6, 21 mellé a $6 \cdot 21 = 126$ -ot. Második lépésben letöröljük a 6-ot és a 21, 126 mellé felírjuk a $126 - 21 = 105$ -öt. Harmadik lépésben letöröljük a 126-ot és a 21, 105 mellé felírjuk a $105/21 = 5$ -öt. Negyedik lépésben letöröljük a 105-öt és az 5, 21 mellé felírjuk a $21 - 5 = 16$ -ot. Ötödik lépésben letöröljük a 21-et és az 5, 16 mellé felírjuk a $16 - 5 = 11$ -et.



B
kategória

B3. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Dulifuli, Nótata, Okoska, Törpilla, Törpliliom, Törpvirág és Ügyifogyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

- Dulifuli: Ki nem állhatok utolsó lenni, de az lettem.
- Nótata: Elöttem és mögöttem is 3-3 törp végzett.
- Okoska: Szerencsére nem lettem utolsó, de Ügyifogyi jobban szerepelt nálam.
- Törpilla: Az utolsó három helyezett közt vagyok.
- Törpliliom: Okoska később végzett, mint én, de Törpilla előbb.
- Törpvirág: Én nyertem és Ügyifogyi is dobogós lett.
- Ügyifogyi: Nem Törpliliom és nem Törpvirág ért be közvetlenül előttem.

Milyen sorrendben végzett a hét törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

Írjátok le az állítások helyesnek vélt sorrendet, és azt is indokoljátok meg, hogy más sorrend miért nem fordulhatott elő.

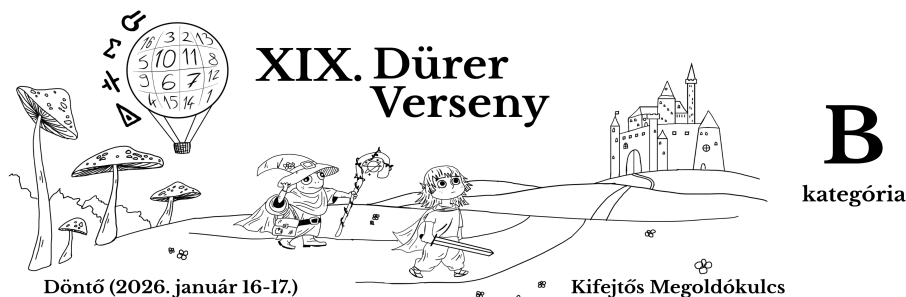
Megoldás: Mivel egyvalaki tévedett, így nézzük meg, hogy vannak-e olyan állítások, amik nem lehetnek egyszerre igazak és akkor köztük lesz a téves válasz. Tegyük föl, hogy Törpilla, Törpliliom és Okoska is igazat mondott. Ekkor Törpilla az utolsó három helyezett között van, Törpliliom pedig mögötte végzett, de Okoska előtt. Ezért Törpilla 5., Törpliliom 6. és Okoska 7. lett, de ez ellentmond Okoska állításának, hiszen ő az utolsó. Tehát találtunk három választ, amik nem lehetnek igazak egyszerre. Akkor a többi törp igazat mondott, ezért Dulifuli utolsó (7.), Nótata 4. és Törpvirág 1. lett az állításaik alapján. Ügyifogyi az első három helyezett közt van és az (igaz) állítása szerint nem Törpvirág van előtte, ezért ő a 3. helyezett. Kimaradt a 2., 5. és 6. hely. Térjünk vissza a három kimaradt törpre, akik közül valaki tévedett és nézzük végig mind a három tévedési lehetőséget.

Ha Okoska tévedett, akkor mivel nem lehet utolsó Dulifuli miatt, így Ügyifogyi előtt kellett beérnie és ő a 2. helyezett. Ekkor Törpliliom 5. vagy 6. lett, vagyis Okoska mögött szerepelt, tehát két téves állításunk van, ami nem lehet.

Ha Törpilla tévedett, akkor neki kell lennie a 2. helyezettnek. Törpliliom az 5., így Okoska mögötte szerepelhet, de nem lesz utolsó. Ebben az esetben mindenki igazat állított, kivéve Törpillát.

Ha Törpliliom tévedett, akkor Ügyifogyi állítása miatt nem lehet 2. helyezett. Törpilla se lehet, tehát Okoska a 2., de akkor Ügyifogyi előtt végzett. Így ismét két téves állításunk van.

Minden esetet megvizsgáltunk és csak egyben nem jutottunk ellentmondásra. A sorrend: Törpvirág, Törpilla, Ügyifogyi, Nótata, Törpliliom, Okoska, Dulifuli.



B4. Öt ember (Anita, Dani, Eszter, Kartal, Tamás) közt sakkbajnokságot rendeztek, ami során mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 2 pontot ér, a döntetlen 1-et, a vereség 0-t. A bajnokság végén mindenkinek 4 pontja lett. Hány döntetlen történhetett a bajnokság során?

Minden, áttalatok lehetségesnek gondolt döntetlenszámmra írjatok 1-1 példát a Válaszlapra. (A Válaszlapon több eset van, mint ahány példa lehetséges.) Azokról a számokról, amikről úgy gondoljátok, hogy nem lehetségesek, írjatok indoklást a Válaszlap hátuljára.

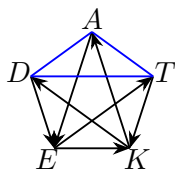
Megoldás: Először azt nézzük meg, hogy milyen módokon lehet a bajnokság végén valakinek 4 pontja. Mivel öten játszanak a bajnokságban, ezért mindenki négy-négy sakkpartit játszik. Kettőnél többször senki sem nyerhet, mivel két győzelemmel már 4 pontja van a játékosnak. Így lehetséges, hogy valaki 2 győzelemmel és 2 vereséggel zárta a bajnokságot vagy 1 győzelem mellett 2 döntetlennel és 1 vereséggel. Ha pedig nem nyert egy játszmát sem valaki, akkor a 4 pontot csak úgy tudja elérni, hogy mind a 4 meccsen döntetlent játszott. Tehát ezen a három módon lehetséges, hogy egy személy 4 pontot szerezzen a bajnokság során. Vegyük észre, hogy mind a három esetben az adott játékos páros sok döntetlent játszott (0, 2 vagy 4-et).

A bajnokság során mindenki 4 partit játszott és egy partit ketten játszanak, azaz összesen $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ sakkjátszma zajlott le. Az nem lehetséges, hogy egyetlen döntetlen született, mivel ekkor a döntetlent játszó két versenyzőnek 1 döntetlenje lenne, ami nem lehetséges, mert ez nem páros. Az sem lehet, hogy pontosan 2 döntetlen született, hiszen az első döntetlent játszó két játékos közül mindkettejüknek kellett, hogy legyen még egy döntetlen partija, így ekkor már legalább 3 döntetlen volt a bajnokságban. Az sem lehet, hogy 9 döntetlen született, hiszen ekkor az összes meccs közül csupán egy győzelemmel eldőlt volt és ennek a partinak a két játékos a ez esetben $4 - 1 = 3$ döntetlennel zárná a bajnokságot, ami nem lehetséges. Hasonlóan az sem lehet, hogy 8 döntetlen volt, hiszen ekkor két meccs nem lett döntetlen, viszont az első eldőlt meccs győztesének és vesztesének is kellett, hogy legyen további nem döntetlen partija, azaz ekkor már legalább 3 nem döntetlen volt a bajnokságban.

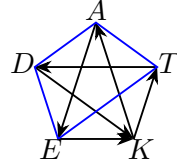
Így maradtak a következő lehetőségek: 0, 3, 4, 5, 6, 7, illetve 10 döntetlen. Ezek mind megvalósulhattak a feltételeknek megfelelően. Gondoljunk úgy a versenyzőkre, hogy egy asztal körül ülnek öten Anita, Dani, Eszter, Kartal és Tamás sorrendben (rájuk innentől a neveik kezdőbetűjével hivatkozunk).

0 döntetlen: ha mindenki az asztalnál a tőle jobbra ülő versenyzőt és a tőle kettővel jobbra ülő versenyzőt győzte le, a tőle balra ülőktől pedig kikapott, akkor egy olyan bajnokságot kapunk, ahol mindenkinek 2 győzelme és 2 veresége van, azaz mindenki 4 ponttal zárt valóban. Így ez az eset lehetséges.

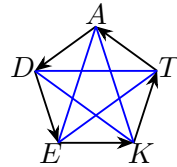
3 döntetlen: ha Anita, Dani és Tamás egymást közt csupa döntetlent játszanak, míg Eszter és Kartal közül Esztert Anita és Dani, Kartalt pedig Tamás győzi le hármuk közül, akkor Anitának, Daninak és Tamásnak is 4-4 pontja lesz. Kartalnak eddig két győzelme volt, míg Eszternek csak egy, így ha Eszter legyőzi Kartalt az ábrán látható módon, akkor mindenkinek 4 pontja lesz. Tehát 3 döntetlen is lehetséges.



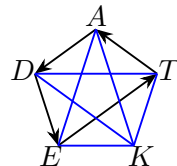
4 döntetlen: ha Eszter, Kartal és Anita körbeverik egymást az ábrán látható módon (azaz Eszter legyőzi Kartalt, aki legyőzi Anitát, aki viszont legyőzi Esztert), továbbá hasonlóan Dani, Kartal és Tamás is körbeverik egymást, akkor Kartalnak 4 pontja lesz, míg a többieknek kettő-kettő. A maradék 4 parti Anita, Dani, Eszter és Tamás között legyen döntetlen, amivel nekik is $2 + 1 + 1 = 4$ pontjuk lesz. Ez az eset is lehetséges.



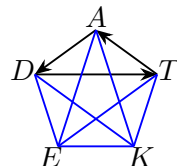
5 döntetlen: az asztalnál mindenki győzze le a tőle közvetlenül jobbra ülő játékost és így kapjon ki a tőle közvetlenül balra ülőtől. A többi 5 játszma eredménye legyen döntetlen. Ekkor mindenkinek egy győzelme, két döntetlenje és egy veresége lesz, azaz valóban 4 ponttal zárják a bajnokságot. Tehát ez az eset is lehetséges.



6 döntetlen: ha Dani megveri Esztert, aki megveri Tamást, aki megveri Anitát, aki pedig megveri Danit, akkor ebből a 4 meccsből mind a négyüknek 2 pontja lesz. Az összes többi 6 meccs legyen döntetlen, így mind a négyüknek $2 + 1 + 1 = 4$ pontja lesz, míg Kartal 4 döntetlennel szintén 4 ponton zár. Ez az eset is lehetséges.

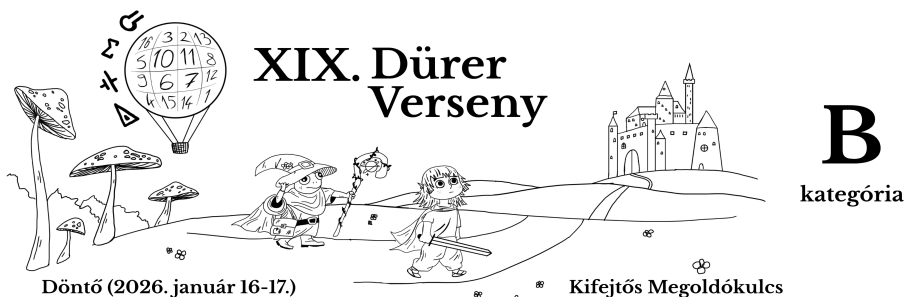


7 döntetlen: ha Dani, Tamás és Anita körbeverik egymást, rajtuk kívül pedig az összes parti döntetlennel zárul, akkor Eszter és Kartal 4-4 döntetlennel végez, míg a többiek egy győzelem mellett két-két döntetlennel, azaz mindenkinek 4 pontja lesz. Ez az eset is lehetséges.



10 döntetlen: ha az összes játszma eredménye döntetlen lett, akkor mindenki 4 döntetlennel, azaz 4 ponttal zárt, tehát ez az eset is lehetséges.

Tehát 0, 3, 4, 5, 6, 7 és 10 döntetlen lehetett a bajnokságban.



B
kategória

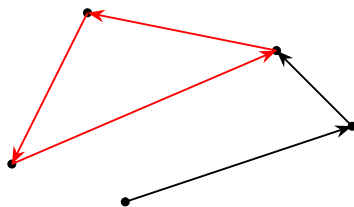
B5. A Megyében 11 hobbit lakik, mindenki egyedül a saját hobbitüregében. Bármely hobbitüreghez pontosan egy másik üreg van, ami a legközelebb van hozzá, és pontosan egy másik üreg van, ami a legtávolabb. Az egyik nap délelőttjén minden hobbit ellátogat ahhoz, akinek az ürege legközelebb van a sajátjához és ott ebédel. Ezután aznap délután minden hobbit ellátogat ahhoz a hobbitüreghez, ami a legmesszebb van attól, ahol ebédelt, és itt tölti az éjszakát.

- Legalább hány hobbitüreg nem üres az éjszaka folyamán?
- Legfeljebb hány hobbitüreget használnak az éjszaka?
- Legfeljebb hányan töltik a saját üregükben az éjszakát?

Minden feladatrészen mutassatok egy lehetséges példát az üregek elhelyezkedésére is és indokoljátok meg, hogy az adott részben a választok miért a lehető legjobb.

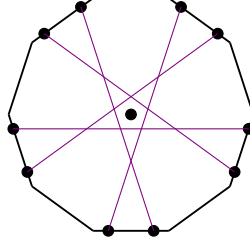
Megoldás: a) Legalább egy hobbitüreg nem lesz üres, hiszen minden hobbit a 11 üreg valamelyikében tölti az éjszakát. Megmutatjuk, hogy el lehet úgy helyezni a 11 üregét, hogy mindenki ugyanabban az üregben töltsen az éjszakát. Ehhez helyezzük el az üregeket a számegyenesre úgy, hogy az első üreg a 0-ra, a következőt pedig az 1-re tesszük. Ezt követően mindig a legutóbb letett üreg kétszeresénél eggyel nagyobb számra tesszük le. Így az üregek a 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023 számokon lesznek. Ekkor minden üregtől az utolsó üreg lesz a legtávolabb, és délben senki nem lesz abban az üregben, így az éjszakát mindenki ebben az üregben fogja tölteni.

b) Először megmutatjuk, hogy nem lehet, hogy minden üreget használnak éjszaka. Induljunk ki egy tetszőleges üregből, és húzzunk egy nyílat abba az üregbe, ahol az üregünk lakója ebédel. Ezután ebből az üregből húzzunk hasonlóan egy nyílat abba az üregbe, ahol ennek a lakója ebédel, és ezt ismétljük addig, amíg visszaérünk egy olyan üregbe ahol már jártunk. Így a nyílak sorozatában lesz egy rész, amik néhány csúcs között egy kört tesznek meg.

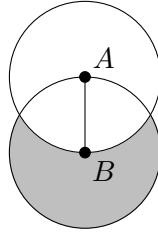


Vegyük észre, hogy minden behúzott nyíl vagy abba az üregbe mutat, ahonnan az aktuális üregbe érkeztünk, vagy ha máshová mutat, akkor rövidebb, mint az a nyíl, amin ide jutottunk (hiszen ha hosszabb lenne, akkor helyette visszamennénk az előző üregbe). Ha a kör több mint kettő nyílt tartalmaz, akkor minden nyíl hosszabb az előzőnél, de ekkor az a nyíl, amin visszaértünk egy már meglátogatott üregbe, rövidebb, mint az összes korábbi él, így annál is, amin innen kimentünk. De ekkor ebből a csúcsból nem oda mentünk volna, ahová a nyíl szerint mentünk, tehát ez nem lehet. Mivel az üregek száma páratlan, lesz legalább egy üreg, amibe nem lép be nyíl, azaz senki nem ebédel ott. Ekkor legfeljebb 10 üregben ebédel valaki és ebből a 10 üregből legfeljebb 10 üregbe mehetnek át éjszakára.

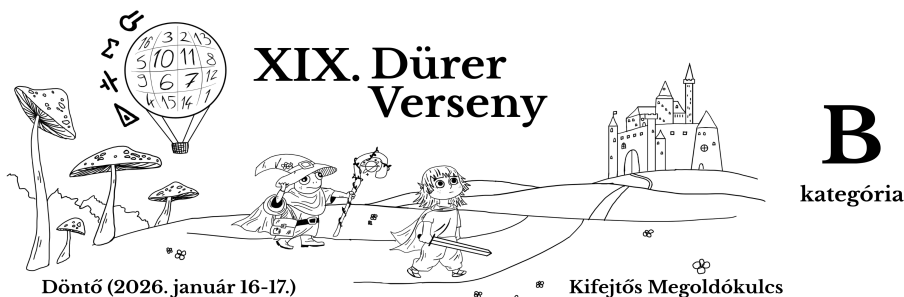
Most mutatunk egy konstrukciót, amiben 10 üreget használnak éjszaka. Helyezzünk el 10 üregét egy 8 egység oldalú szabályos 10-szög oldalain úgy, hogy minden második oldalon van 2 üreg a két csúcstól 1 egység távolságra, a többi oldalra pedig ne tegyünk üregét. A maradék egy üregét tegyük a szabályos tíszög középpontjába és toljuk el 0.1 egységgel egy másik üreg irányába (valójában bármilyen pont jó, ami a másik 10 üregtől több, mint 6 távolságra van, és van hozzá egy egyértelmű legközelebbi és legtávolabbi üreg). Ekkor könnyen látható, hogy tíszög egy oldalán lévő két hobbit délelőtt helyett cserél, így a tíszög oldalain lévő mind a 10 üregben lesz hobbit délben (a középső szintén ezek egyikében lesz). Minden ilyen üregtől a legtávolabbi a “vele majdnem szemközt” üreg lesz, amiket párba tudunk állítani az ábrán látható módon, és ezen párok éjszakára helyet fognak cserélni, így éjszaka is lesz ebben a 10 üregben hobbit.



c) Az a) részben mutatott konstrukcióban az utolsó (a 0-tól legtávolabb lakó) hobbit a saját üregében tölti az éjszakát. Megmutatjuk, hogy 1-nél több hobbit nem töltheti a saját üregében az éjszakát. Jelölje a A egy olyan hobbit üregét, aki otthon tölti az éjszakát. Ez csak úgy lehetséges, hogy A -hoz egy B üreg van a legközelebb, és a B üregtől viszont A van a legtávolabb. Ekkor A -n kívül minden üreg az ábrán a színezett területen található.



Legyen C egy A -n és B -n kívüli üreg. Ekkor a hozzá legközelebbi üreg nem lehet A , hiszen A -hoz B közelebb van. Ha B a legközelebbi üreg, akkor az éjszakát C lakója is A -ban tölti, így nem lehet a saját üregében. Így tehát elég megnézni azt az esetet, ha a C -hez legközelebbi üreg D , ami A -tól és B -től is különböző. Ekkor C és D távolsága kisebb mint C és B távolsága, ami kisebb, mint A és B távolsága, ami kisebb, mint A és D távolsága, ezért D -ből biztosan nem megy vissza C -be éjszakára (hiszen A messzebb van tőle, mint C). Tehát az egyetlen üreg, aminek a lakója otthon tölti az éjszakát, az A -val jelölt üreg.

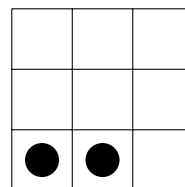
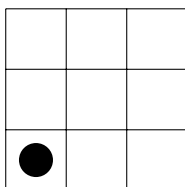


B6. Egy mágikus ládában kilenc rekesz van 3×3 -as elrendezésben. Két játékos felváltva pakol köveket a láda rekeszeibe, minden rekeszbe legfeljebb egy kő rakható. Az első lépésben a második játékos kijelöl egy sort vagy oszlopot, az első játékosnak pedig ebbe a sorba vagy oszlopba kell rakni a követ. Ezután az első játékos jelöl ki egy sort vagy oszlopot és a második játékos helyezi le a követ. Majd ezek a lépések ismétlődnek felváltva. A játék akkor ér véget, ha valaki nem tud követ lerakni a másik által kijelölt sorba vagy oszlopba, és az a játékos veszít, aki nem tudta a követ lehelyezni.

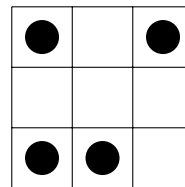
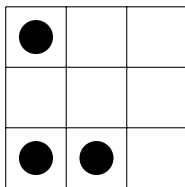
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy ti vagy a szervező rakja le az első követ.

Megoldás: Az a játékos tud nyerni, aki először tud lehelyezni egy követ úgy, hogy egy sorban vagy oszlopban mindhárom helyen legyen kő, mert ekkor azt jelöli ki a következő lépés során és a másik játékos nem fog tudni lépni.

Az első játékos meg tudja nyerni a játékot, megadunk számára egy nyerő stratégiát. Az első lépésben tetszőleges helyre rakhat le a kijelölt sorból vagy oszlopból, majd jelölje ki a lerakott kő sorát.



Ezután ha a második úgy jelöl ki, hogy be tudja fejezni az első ezt a sort, akkor fejezze be és jelölje ki ezt a sort, ezzel nyerjen. Ha a második nem így jelölt, akkor megint rakjon az első játékos tetszőlegesen követ, majd megint jelölje ki a lerakott kő sorát.



Ákárhogyan játszott a második, a következő lépésben az első játékos ki tud alakítani egy teli oszlopot vagy sort, majd azt kijelölve nyerni. Ha a második oszlopot jelöl ki, akkor vagy az egyik sort tudja betölteni vagy mindkét már használt sorból van már ebben az oszlopban, akkor az egyetlen lehetséges lépésével az oszlopot telíti be. Ha már használt sort jelöl ki a második, akkor ez első azt betelíti. Négy kő lehelyezésével az egyik oszlopban lesz legalább két kő, mivel minden oszlopban legfeljebb egy kő csak összesen legfeljebb három lenne, a mi esetünkben két sort használtunk, így lesz egy oszlop, amiben pontosan két kő van. Emiatt ha a második az eddig használatlan sort jelöli ki, akkor az első játékos be tudja telíteni azt az oszlopot, amelyikben két kő volt.