



XIX. Dürer Verseny

B

kategória

B1. A Vörös Királynő és a Fehér Királynő dobókockákkal játszanak. Mindketten három kockával dobznak. A Vörös Királynő által dobott három szám szorzata 36, összege 11, a Fehér Királynő számainak szorzata 12, összege 8. Melyik szám szerepel mindkettőjük dobott számai közt?

Megoldás: A Vörös Királynő által dobott három szám szorzata 36. A kockákon csak 1-től 6-ig szerepelnek számok, így például 9-et nem tud dobni. A lehetséges dobások, amik 36 szorzatot adnak: 6, 6, 1, vagy 6, 3, 2, vagy 4, 3, 3. Ezek közül csak a $6 + 3 + 2$ esetén lesz 11 az összeg.

A Fehér Királynő által dobott három szám szorzata 12. A lehetséges dobások, amik 12 szorzatot adnak: 6, 2, 1, vagy 4, 3, 1, vagy 3, 2, 2. Ezek közül csak a $4 + 3 + 1$ esetén lesz 8 az összeg.

Tehát a Vörös Királynő a 6, 3, 2 számokat dobta, a Fehér Királynő pedig a 4, 3, 1-et. A 3 az a szám, ami szerepel mindkettőjük dobott számai között.

B2. Aprajafalván Törpapa a törpjeit sorokba állítja egy ünnepségre. Azt veszi észre, hogyha minden sorba pontosan 3 törpöt oszt, akkor 2 törp marad ki, ha soronként pontosan 4 törpöt oszt, akkor 1 marad ki, ha pedig pontosan 5-öt, akkor 4 marad ki. Hány törp marad ki, ha hatosával állítja őket sorba?

Megoldás: Aprajafalváról 5 törp elutazott. Törpapa így is sorbaállítja az otthon maradt törpjeit. Amikor hármasával állítja őket sorokba, akkor senki sem marad ki, hiszen éppen egy sornyi (három), meg a két kimaradó törp utazott el. Amikor négyesével állnak az otthon maradt törpök a sorokban, akkor megint senki nem marad ki, hiszen éppen egy sornyi (négy törp), meg a kimaradó 1 törp utazott el. Tehát ekkor a törpök száma osztható hárommal és néggyel is, azaz osztható 12-vel. Így ha az otthon maradt törpöket hat fős sorokba osztja Törpapa, akkor senki sem marad ki. Tehát eredetileg, amikor 6 fős sorokba osztotta a törpöket, akkor 5 törp maradt ki (amennyi elutazott).

A megoldásban szereplő 5-ös szám légbőlkapottnak tűnhet. Egy lehetséges módszer az ilyen feladatok megoldására az, hogy végigmegyünk a 3-mal 2 maradékot adó számokon és leellenőrizzük a 4-es maradékaikat. Amikor megfelelőhöz érünk, akkor megkapunk egy számot, aminek a 3-as és a 4-es maradéka is megfelelő, így a 12-es (tehát 6-os) maradéka is. Vegyük észre, hogy kihasználtuk, hogy a 3 és a 4 relatív prím (vagyis hogy a legnagyobb közös osztójuk az 1).

B3. Egy hosszú autópálya mentén kilométerenként egy-egy számozott kilométerkő áll, az út elején nullás kővel kezdve. Egy fehér nyúl áll a 2026-os kilométerkő mellett. Egyszer csak a nyúl útnak indul, először egy kilométert ugrik csökkenő irányba, majd kettőt növekvőbe, és ezt folytatva felváltva ugrik a két irányba, mindig egy kilométerrel többet, mint előzőleg. A 2026 kilométer hosszú ugrása után megáll. Hányas kilométerkőnél áll ekkor?

Tudjuk, hogy ezalatt a nyúl sosem éri el az autópálya egyik végét sem.

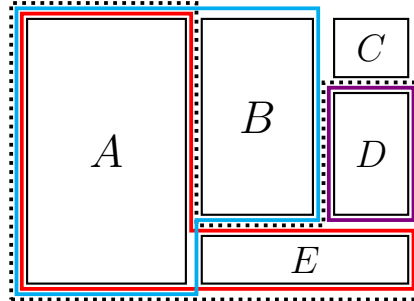
Megoldás: A nyúl először egy kilométert ugrik csökkenő irányba, majd kettőt növekvőbe, ekkor a 2027-es kilométerkőnél lesz. Ezután három kilométert ugrik csökkenő irányba, és négyet növekvőbe, ekkor 2028-as kilométerkőnél lesz. Megfigyelhetjük, hogy ha egy páratlan számot ugrik lefelé, és az ennél eggyel nagyobb páros számot felfelé, a két lépést összevonva ugyanaz történik, mintha csupán egy kilométert ugrott volna felfelé. A történetben az $1, 2, 3, \dots, 2026$ hosszú ugrásokat vizsgáltuk, kettesével összevonva ugyanazt kapjuk, mintha 1013 alkalommal ugrott volna 1 kilométert növekvő irányba. A 2026-os kőtől indult és $2026 + 1013 = 3039$, tehát a feladatbeli ugrások után a nyúl a 3039-es kilométerkőnél pihent meg.

B4. Az alábbi térkép mutatja négy jóbarát reggeli futását: Benedek a piros, Benjamin a lila, Bogi a kék, Brigi a pontozott utat futotta végig. Hány métert tett meg ma reggel Brigi, ha Benedek 1300 m-t, Benjamin 400 m-t, Bogi pedig 1200 m-t futott?

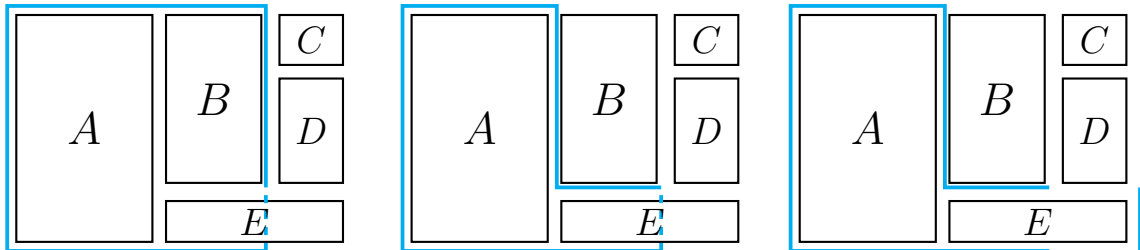
Benedek az A és E, Benjamin a D, Bogi az A és B, Brigi pedig az A, D és E épületek együttesét futotta körbe. Az utcák vastagsága nem számít.



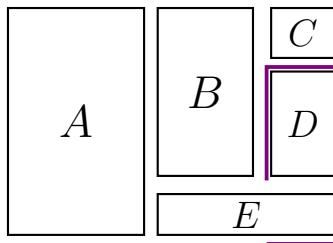
B
kategória



Megoldás: Egy téglalap szemközti oldalai ugyanolyan hosszúak. Ezt felhasználva mozgassuk át Bogi futásának útvonalát az alábbi módon úgy, hogy a hossz ne változzon:



Ezek után Benjamin útvonalát is mozgassuk át.



Látszik, hogy Brigi útvonala ezen két átmozgatott útvonal összege, vagyis a megoldás $1200 + 400 = 1600$ m.

B5. Ábris sült krumplit eszik szósszal, összesen 120 szál krumplija van. Ha minden krumpliját egyszer mártaná bele a szószba, akkor megmaradna a szósz negyede. Hány szála nem maradna szósz, ha minden krumpliját kétszer mártaná bele a szószba?

Amíg van szósz, addig Ábris minden mártáskor ugyanannyi szószot rak egy sült krumplira.

Megoldás: A feladat szövege alapján egyszeri mártás esetén a krumplira a szósz $1 - 1/4 = 3/4$ része kerül fel. Így ahhoz, hogy kétszeri mártás esetén legyen elég szósz, ahhoz a szósz $2 \cdot 3/4 = 6/4 = 3/2$ részére lenne szükség. Tehát 120 sült krumpli kétszeri mártásához a szósz $3/2$ részére (másfélszeresére) lenne szükség, így mindössze a sült krumpli $2/3$ részét tudja bemártani kétszer Ábris, azaz $2/3 \cdot 120 = 80$ szálát. Tehát $120 - 80 = 40$ szála nem maradna szósz.

B6. Egy lottóhúzáson öt különböző számot húznak ki az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül. Eszter a lottóhúzás után az öt kihúzott szám közül az összes lehetséges módon összeadott két-két számot és az így kapott összegeket felírta magának. Ezek az összegek az 5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20 és a 24 voltak. Mennyi az öt kihúzott szám szorzata?



B
kategória

Megoldás: A legkisebb összeget Eszter biztosan úgy kapta, hogy a két legkisebb kihúzott számot adta össze. Mivel ez az összeg 5, ezért a két legkisebb kihúzott szám vagy az 1 és a 4 vagy a 2 és a 3 lehettek. A második legkisebb összeg biztosan a legkisebb szám és a harmadik legkisebb szám összege, hiszen az összes többi párosítás összege legalább ekkora lesz. Mivel ez az összeg a 8, ezért ha a legkisebb szám a 2, akkor a harmadik legkisebb a 6 lenne. Viszont ekkor a 2, 3 és a 6 is kihúzott számok, de nem szerepel a $3 + 6 = 9$ az összegek között, azaz ez az eset nem fordulhatott elő. Tehát a két legkisebb szám az 1 és a 4, így a harmadik legkisebb a 7 lesz a 8-as összeg miatt. A második legnagyobb összeg a legnagyobb és a harmadik legnagyobb kihúzott szám összegeként jön létre, azaz mivel a 7 a középső kihúzott szám és $20 = 7 + 13$, ezért ebből a legnagyobb szám a 13. A legnagyobb összeg a 24, így a második legnagyobb kihúzott szám a $24 - 13 = 11$ lesz. A kihúzott számok: 1, 4, 7, 11, 13 és ezek szorzata 4004.

B7. 1987. 06. 25. volt a legutóbbi olyan dátum, amely leírásához 8 különböző számjegyre volt szükség. Melyik évben lesz a legközelebbi ilyen dátum?

Megoldás: A hónapokat 01-től 12-ig tudjuk leírni, a napokat pedig 01-től 31-ig. Ebből következik, hogy a hónap leírásakor is, és a nap leírásakor is szerepel a 0, 1 és 2 számjegyek valamelyike. Tehát e három számjegy közül legalább kettőt nem használhatunk fel az évszámban. Minél korábbi dátumot keresünk, ezért maradjunk a 2-vel kezdődő éveknél. Ekkor a 0 és 1 számjegyet az évszámban már nem írhatjuk le, így hát a legkorábbi lehetőség az 2345-ös év. Megmutatjuk, hogy ez valóban megvalósítható: a 2345.06.17. a feladat feltételeinek megfelelő dátum.

B8. Dulifuli felír egy kétjegyű számot a táblára, ami nem osztható tízzel, és a két számjegye különböző. Ezek után Ügyifogyi felcseréli ennek a számnak a jegyeit, és a kapott kétjegyű számot felírja Dulifuli száma mellé a táblára. Végül Okoska összeadja a két számot. Ezek alapján hány különböző eredményt kaphat Okoska?

Megoldás: Legyen a Dulifuli által felírt kétjegyű szám $\overline{ab}$, azaz olyan szám, amiben az egyesek helyén b , a tízesek helyén pedig a áll. Ekkor a és b is 1-9-ig egy-egy számjegy, hiszen tudjuk, hogy a felírt szám kétjegyű és 10-zel nem osztható, továbbá $a \neq b$. Ekkor Ügyifogyi a $\overline{ba}$ számot írja a táblára. A Dulifuli által írt szám értéke helyiértékekkel számolva $10a + b$, míg Ügyifogyi számának értéke $10b + a$. Így ha Okoska összeadja ezt a két számot, akkor $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$ számot fogja kapni. Okoska száma tehát biztos osztható 11-gyel. De ekkor $a + b$ az eredetileg Dulifuli által felírt szám számjegyeinek összege, ez legalább $1 + 2 = 3$ és legfeljebb $8 + 9 = 17$, ezek között pedig bármilyen értéket felvehet. Azaz $a + b$ értéke egy egész szám 3-17-ig és az Okoska által kapott összeg ennek a 11-szerese. Ez 15 lehetőség, azaz Okoska 15-féle különböző eredményt kaphatott. A legkisebb eredmény a 33, a legnagyobb a 187, és könnyen látható, hogy minden köztes opcióra van példa.

B9. Hablaty az ábrán látható kilenc üres mezőbe egy-egy egész számot írt. Ezután észrevette, hogy minden sorban és oszlopban igaz az, hogy a szélső számokkal együtt öt különböző egymást követő szám szerepel valamilyen sorrendben. Mennyi a szürke mezőkbe írt számok szorzata?

	6	4	5	
5				7
3				1
4				3
	3	2	8	



B
kategória

Megoldás: A feladat feltételei alapján ha egy sorban, vagy egy oszlopban szerepel két szám, akkor bármely közöttük lévő egész szám is. Továbbá vegyük észre azt is, hogy minden sorban és oszlopban 4 az eltérés a benne szereplő legnagyobb és legkisebb szám között és semelyikben nem szerepelhet ugyanaz a szám kétszer.

Vizsgáljuk a jobb oldali oszlopot! Ebben a 7-es számjegy nem kerülhet a felső helyre, mivel ott már van egy 7-es, továbbá a középsőre sem, mivel akkor ott az 1 és a 7 között már 6 lenne az eltérés. Tehát a 7-es csak az alsó sorba kerülhet. Hasonlóan a 6-os sem kerülhet középre, mivel akkor ott 1-nek és a 6-nak már 5 lenne az eltérése, tehát a jobb felső sarokba 6-os kerül.

	6	4	5	
5			6	7
3				1
4			7	3
	3	2	8	

A jobb oldali oszlopban a hiányzó szám nem lehet a 9, mivel akkor a középső sorban az 1 és a 9 között már 8 lenne az eltérés, így oda csak 4 kerülhet.

Vegyük észre, hogy az alsó sorban már szerepel 3-as és 7-es, tehát ott a számok 3-tól 7-ig szerepelnek, amiből már csak az 5-öt és a 6-ot nem írtuk be. Mivel a bal oldali oszlopban már van 6-os, így csak az 5-ös kerülhet a bal alsó sarokba, tehát az alsó sor középső helyére jön a 6-os.

	6	4	5	
5			6	7
3			4	1
4	5	6	7	3
	3	2	8	

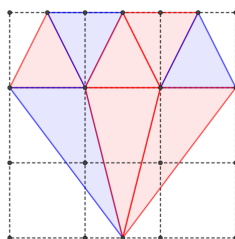
Az előbbi észrevételhez hasonlóan a középső oszlopban 2-től 6-ig kellenek, hogy legyenek a számok, amiből már csak a 3 és az 5 hiányzik. Mivel a felső sorban már van 5-ös, így a középső oszlop felső mezejébe 3-as kerül, középre pedig az 5-ös.

A középső sorban ekkor könnyen látható, hogy csak akkor kapunk egymást követő számokat, ha a jobb oldali mezejébe 2-est írunk. Végül pedig a bal oszlopot tekintve láthatjuk azt, hogy csak akkor kapunk ott egymást követő számokat, ha a bal felső sarokba 4-es kerül.

	6	4	5	
5	4	3	6	7
3	2	5	4	1
4	5	6	7	3
	3	2	8	

Tehát a szürke mezőkbe két 5-ös és egy 6-os kerül, melyek szorzata $5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$.

B10. Egy négyzetrácsos lapon összekötöttünk néhány rácspontot és oldalfelező pontot, így az ábrán látható gyémánt alakot kaptuk. Hány cm^2 a késsel színezett részek területeinek összege, ha az egész gyémánt területe 198 cm^2 ?



Megoldás: Legyen egy-egy kis négyzet oldala 1 egység hosszúságú. Ekkor a kis háromszögek területe $0,5$ területegység, hiszen átdarabolható egy $0,5 \times 1$ -es téglalappá. Az öt kis háromszög így összesen $2,5$ területegység. Az alsó háromszögek együtt egy nagyobb háromszöget alkotnak, aminek területe 3 , hiszen átdarabolható egy $1,5 \times 2$ -es téglalappá. A három alsó háromszög közül a középső területe 1 területegység, hiszen átdarabolható egy $0,5 \times 2$ -es téglalappá, a másik kettő pedig egyenlő, hiszen az ábra szimmetriája miatt egybevágók. Így ennek a két háromszögnek a területe $\frac{3-1}{2} = 1$ területegység. Ezek alapján a késsel színezett terület 2 területegység, az egész alak területe pedig $5,5$ területegység. A kék háromszögek területe az egész alakzat területének $\frac{2}{5,5} = \frac{4}{11}$ része, ami $198 \cdot \frac{4}{11} = 72 \text{ cm}^2$.

B11. Merlin 9 sárkánytojást talált, amiknek a színe piros, zöld vagy fekete, míg az alakja gömb, kocka vagy gyűrű. Minden színből és alakból is 3-3 tojás van, és minden tojás csak egyféle színű és alakú lehet. Azt is észrevette, hogy nincs két tojás, amiknek a színe és az alakja is ugyanolyan. Merlinnek a kiköltéshez úgy kell elhelyeznie a tojásokat egy 3×3 rekeszes dobozba, hogy megfeleljen az ábrának. Hányféleképpen helyezheti el így a tojásokat?



B
kategória

$\square P$	Z	$\odot$
$\odot$	P	$\odot Z$
F	$\square$	F

Megoldás: A feladat feltételeinek akkor felel meg egy kitöltés, ha minden színből három különböző alakú tojás van. Kettő pirosnak a helyét látjuk az ábrán, a harmadik piros tojás csak az egyelőre színtelen gömb és gyűrű lehet, mert piros kocka tojás már van.

1. eset: Ha a gömb piros, akkor a középen lévő piros tojás csak gyűrű lehet. A zöldekből is kettő helye adott, a harmadik a színtelen gyűrű és kocka valamelyike lesz. Ha a gyűrű lesz zöld, akkor a harmadik zöld alakja csak kocka lehet, és a három legalsó sorban lévő tojás mind fekete. Mivel a középső kocka alakú, a másik kettő gömb vagy gyűrű és mindkettő lehetséges a feladat feltételei szerint, ez **2 lehetőség**.

Ha a kocka lesz zöld, akkor a harmadik zöld alakja gyűrű, a jobb felső sarokban lévő gyűrű csak fekete lehet, az alsó két fekete tojás alakja gömb és kocka valamilyen sorrendben, ez is **2 lehetőség**.

2. eset: Ha a harmadik piros a jobb felső sarokban lévő gyűrű lesz, akkor a középső piros gömb alakú. A harmadik zöld ekkor csak a színtelen kocka lehet, mert zöld, gömb alakú tojás már van. A felső sorbeli zöld tojás gyűrű lesz, a kimaradt, az ábrán színtelen gömb tojás pedig fekete, ezért ismét az alsó két fekete alakja ad újabb **2 lehetőséget**.

Minden esetet megvizsgáltunk, és összesen 6-féleképpen helyezheti el Merlin a tojásokat.

B12. Ki szeretnénk tölteni az alábbi ábrát 1-től 9-ig a számjegyekkel úgy, hogy minden szám pontosan egyszer szerepeljen, valamint hogy az 5-ös számjegy ne középre kerüljön. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a bejelölt relációs jelek ($<$ és $>$) helyes irányba álljanak?

$\odot$	$<$	$\odot$	$<$	$\odot$
$\vee$		$\vee$		$\vee$
$\odot$	$<$	$\odot$	$<$	$\odot$
$\vee$		$\vee$		$\vee$
$\odot$	$<$	$\odot$	$<$	$\odot$

Megoldás: Látszik, hogy a jobb felső sarokban lévő számnak nagyobbannak kell lennie minden másnál, ezért ide csak a 9-es kerülhet. Hasonlóan a bal alsó sarokba csak 1-es kerülhet. Az 5-ös nem kerülhet a felső sor közepére, mert van öt darab mező, ahova kisebb számnak kell kerülnie, mint oda. Hasonlóan az 5-ös nem kerülhet jobb középre, alul középre és bal középre sem. Nézzük meg, hányféleképpen lehet kitölteni, ha bal felülre kerül.

Nézzük meg, milyen szám kerül középre. Ennél nagyobb a felül középső, valamint a jobb középső is, ezért ide legfeljebb 6-os kerülhet. Hasonlóan belátható, hogy legalább 4-esnek kell ide kerülnie. Nézzük azt az esetet, amikor 6-os kerül ide. Ekkor a felül középső, valamint a jobb középső mezőkbe kell kerülnie a 7, 8-nak, de ezek mindig felcserélhetőek lesznek. Ekkor nézzük, hova kerülhet a 4-es. Bal középre kerülhet, ekkor a maradék helyeket egyféleképpen lehet kitölteni. Ha jobb alulra kerül, akkor a 2-es, 3-as számokat szabadon be tudjuk írni a bal középső, illetve alul középső helyekre. Ez összesen $3 \cdot 2$ lehetőség. Ha pedig 4-es kerül középre, hasonlóan kapunk 6 kitöltést. Szimmetria miatt ugyanennyi, 12 kitöltés van, ha az 5-ös jobb alulra kerül. Vagyis összesen 24 jó kitöltés van.

B13. Az intergalaktikus birodalom XIX. bolygóján egy év 30 hónapból áll. A hónapok közül kettő 17 napos, öt 18 napos, tizenkilenc 19 napos, kettő 20 napos, kettő pedig 21 napos, de azt nem tudjuk, hogy ezek milyen sorrendben követik egymást. Az idei év a XIX. bolygón hétfővel kezdődött. Ezek alapján legfeljebb hány hónap kezdődhet hétfővel ebben az évben?



B
kategória

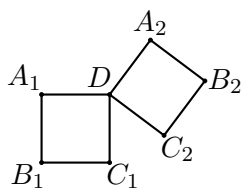
A bolygón a hetek, a Földhöz hasonlóan 7 napból állnak.

Megoldás: Próbáljuk meg a hónapokat úgy csoportokba osztani, hogy minden csoportban a napok összege osztható legyen 7-tel. Ekkor ha ez a csoport hétfővel kezdődik, akkor a csoport utáni első nap is hétfő lesz. Ha a csoportjaink 2 db $\{21\}$, 2 db $\{17, 19, 20\}$, 5 db $\{18, 19, 19\}$ és az utolsó csoport a maradék 7 db 19 napos hónap, akkor minden csoportban a napok száma osztható 7-tel, és mivel az első csoport hétfővel kezdődik, ezért mind a 10 csoport hétfővel kezdődik. Egy csoport kezdete persze egy hónap kezdete is, tehát lesz 10 olyan hónap, ami hétfővel kezdődik.

Még be kell látnunk, hogy 10-nél több hónap nem kezdődhet hétfővel. Ehhez nézzük meg, hogy melyik hónaphoz hány nap hiányzik ahhoz, hogy egész számú hét legyen (azaz a napok száma osztható legyen 7-tel). Ez 17 nap esetén 4, 18 nap esetén 3, 19 nap esetén 2, 20 nap esetén 1, 21 nap esetén pedig 0. Ha ezeket összeadjuk az összes hónapra, akkor összesen 63 napnyi hiányt kapunk, amit el kell osztanunk úgy a csoportok közt, hogy minden csoportban 7-tel osztható számú nap hiányozzon összesen (különben nem lehet 7-tel osztható a csoportban a napok száma). Elég azt az esetet néznünk, amikor a két 21 napos hónap egy-egy csoportot alkot önmagában, hiszen ha egy legalább két hónapos csoportban benne van egy 21 napos hónap, akkor azt kivéve a maradék is 7-tel osztható, és a 21 napos hónap önmagában is, tehát eggyel több csoport kezdődik hétfővel.

Így tehát feltehető, hogy az első két hónap 21 napos (hiszen a csoportok sorrendje nem számít), és elég azt néznünk, hogy a maradék 28 hónapból hány megfelelő csoportot tudunk csinálni. Ahhoz, hogy legalább 11 kezdődjön hétfővel, legalább 9 csoportba kell osztanunk a hónapokat. Ekkor a 63 nap hiányt csak úgy lehet 9 csoportba osztani, hogy minden csoportba 7 nap hiány kerül. Ez nem lehetséges, mert ha néhány szám összege 7, akkor muszáj köztük legalább egy páratlannak lennie, de csak a 3 és az 1 nap hiányú hónapokban páratlan a hiányzó napok száma, az ilyen hónapokból pedig összesen csak 7 van. Így tehát nem kezdődhet 10-nél több hónap hétfővel.

B14. Gandalf felrajzolt a porba két 125 cm oldalhosszúságú négyzetet, melyeknek az egyik csúcsa közös. A négyzetek csúcsait elnevezte az ábra szerint. Tudjuk, hogy az A_1 és A_2 csúcsok távolsága 234 cm, valamint a B_1 és B_2 csúcsok távolsága 322 cm. Hány centiméter a C_1 és C_2 csúcsok távolsága?

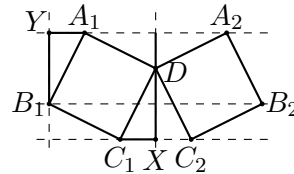
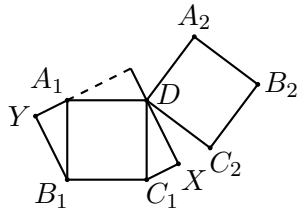


Megoldás: Vegyük észre, hogy az ábra szimmetrikus C_1DC_2 szögfelezőjére. Ez azért van, mert az A_1DA_2 , B_1DB_2 és C_1DC_2 háromszögek egyenlőszárúak, amelyekben mindben D az alappal szemben fekvő csúcs.

Legyen f a C_1DC_2 szögfelezője. Legyen X a C_1 pont merőleges vetülete f -re. Legyen továbbá Y a B_1 -en átmenő, f -fel párhuzamos egyenes, valamint az A_1 -en átmenő, f -re merőleges egyenes metszéspontja. Ekkor a DC_1X , valamint a B_1A_1Y háromszögek egybevágóak, hiszen $DC_1 \parallel B_1A_1$, $C_1X \parallel A_1Y$ és $XD \parallel YB_1$, valamint $A_1B_1 = C_1D$. Tehát $C_1X = A_1Y$. Vegyük észre, hogy C_1X a megoldás fele. Továbbá vegyük észre, hogy az ábra szimmetriája miatt (pontosabban a $B_1B_2A_2A_1$ trapéz szimmetrikussága miatt) $A_1Y = \frac{B_1B_2 - A_1A_2}{2}$. Vagyis a megoldás $322 - 234 = 88$.



B
kategória



B15. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek a számjegyeinek összege 11, de nem szerepel benne a 0-s számjegy?

Megoldás: Vegyünk egy 1×11 -es téglalapot. Ezen fogunk ábrázolni egy-egy ilyen számot az alábbi módon. Néhány függőleges vonallal kisebb, egész oldalhosszúságú téglalapokra daraboljuk úgy, hogy ha a szám első jegye x , akkor balról az első téglalap x széles lesz. Ha a második jegy y , akkor a második téglalap y széles lesz és így tovább. Látszik, hogy minden egyes olyan számhoz, amiben a jegyek összege 11 és nincs benne 0, ahhoz létezik ilyen felbontás, valamint két különböző ilyen számhoz különböző téglalapfelbontás tartozik. Sőt visszafelé, minden téglalapfelbontáshoz is tartozik egy-egy ilyen szám, ha nincs olyan téglalap, aminek a szélessége nagyobb, mint 9.

Az összes téglalapfelbontás száma 1024, mert minden, a függőleges oldaltól egész távolságra lévő függőleges vonalnál egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy behúzzuk-e, vagy sem. Ez minden esetben két lehetőség, és 10 darab ilyen döntés van, tehát ez $2^{10} = 1024$ opció. Ebből viszont ki kell vonni azokat az eseteket, amikor van olyan téglalap, aminek a szélessége nagyobb, mint 9. Ha van egy 10 hosszú téglalap, akkor amellett csak 1 darab 1 széles lehet, vagy tőle jobbra, vagy tőle balra, ez két eset. Ha van 11 hosszú téglalap, akkor az kitölti az egész téglalapot. Vagyis a megoldás $1024 - 3 = 1021$.

B16. Alice szeretne vásárolni a Bolond Kalapostól. Alice-nél és a Bolond Kalaposnál is 5-5 darab pozitív egész és nem feltétlen különböző címletű pénzérme van. A vásárlás során Alice odaad néhány pénzérmet a Kalaposnak, aki visszaad a sajátjai közül néhány (akár 0 darab) pénzérmet. Azt veszik észre, hogy így Alice bármely egész értéket pontosan ki tud fizetni 1-től n -ig. Mi lehet n legnagyobb értéke?

Ha az Alice-nél lévő pénzérme értéke 1, 11, 42, 69 és 100, a Kalaposnál pedig 1, 1, 1, 1 és 7, akkor az 1, 2 = 11 - 7 - 1 - 1, 3 = 11 - 7 - 1, 4 = 11 - 7, 5 = 11 + 1 - 7 összegek kifizethetőek, de a 6-ot már nem tudná kifizetni.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy n lehető legnagyobb értéke $(32 - 1) \cdot 32 = 992$.

A konstrukcióhoz megadunk megfelelő érmeértékeket. A konstrukcióban legyen Kalaposnál az első öt 2-hatvány, míg Alice-nél az azt követő öt 2-hatvány. Tehát precízebben Kalaposnál legyen 1, 2, 4, 8, 16, míg Alice-nél 32, 64, 128, 256, 512. Vegyük észre, hogy az Alice-nél lévő számok éppen a 32-szeresei a Kalaposnál lévő számoknak. A számok 2-es számrendszerbeli alakjából tudjuk, hogy bármely pozitív egész $\ell \leq 31$ -re ℓ előáll csupán Kalapos néhány számának összegeként. Hasonlóan tehát bármely pozitív egész $k \leq 31$ -re $32 \cdot k$ előáll csupán Alice néhány számának összegeként. Ekkor viszont tetszőleges $k \leq 31$ pozitív egészre és $\ell \leq 31$ nemnegatív egészre kifizethető $32 \cdot k - \ell$, amik épp előállítják a nemnegatív egészeket $31 \cdot 32$ -ig.

Az indokláshoz belátjuk, hogy ennél nagyobb n -ekre a feladat nem teljesíthető. Nézzük meg, hogy hányféle érmekombinációt tud adni Alice Kalaposnak. Bármelyik érméről egymástól függetlenül eldönthető, hogy odaadja-e Kalaposnak vagy sem, ez $2^5 = 32$ opció. Viszont az nem megengedett, hogy egy érmét sem ad át, tehát összesen csak 31-féle opciója van. Viszont Kalaposnak hasonlóan 32 opciója van arra, hogy kiválassza milyen érmét ad vissza. Ha az ilyen oda- és visszaadások mind különböző értékeket adnak, akkor az legfeljebb $31 \cdot 32 = 992$ opciót ad, amivel kész lettünk.