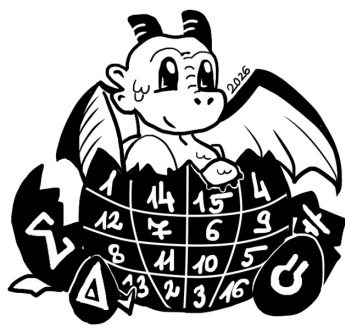
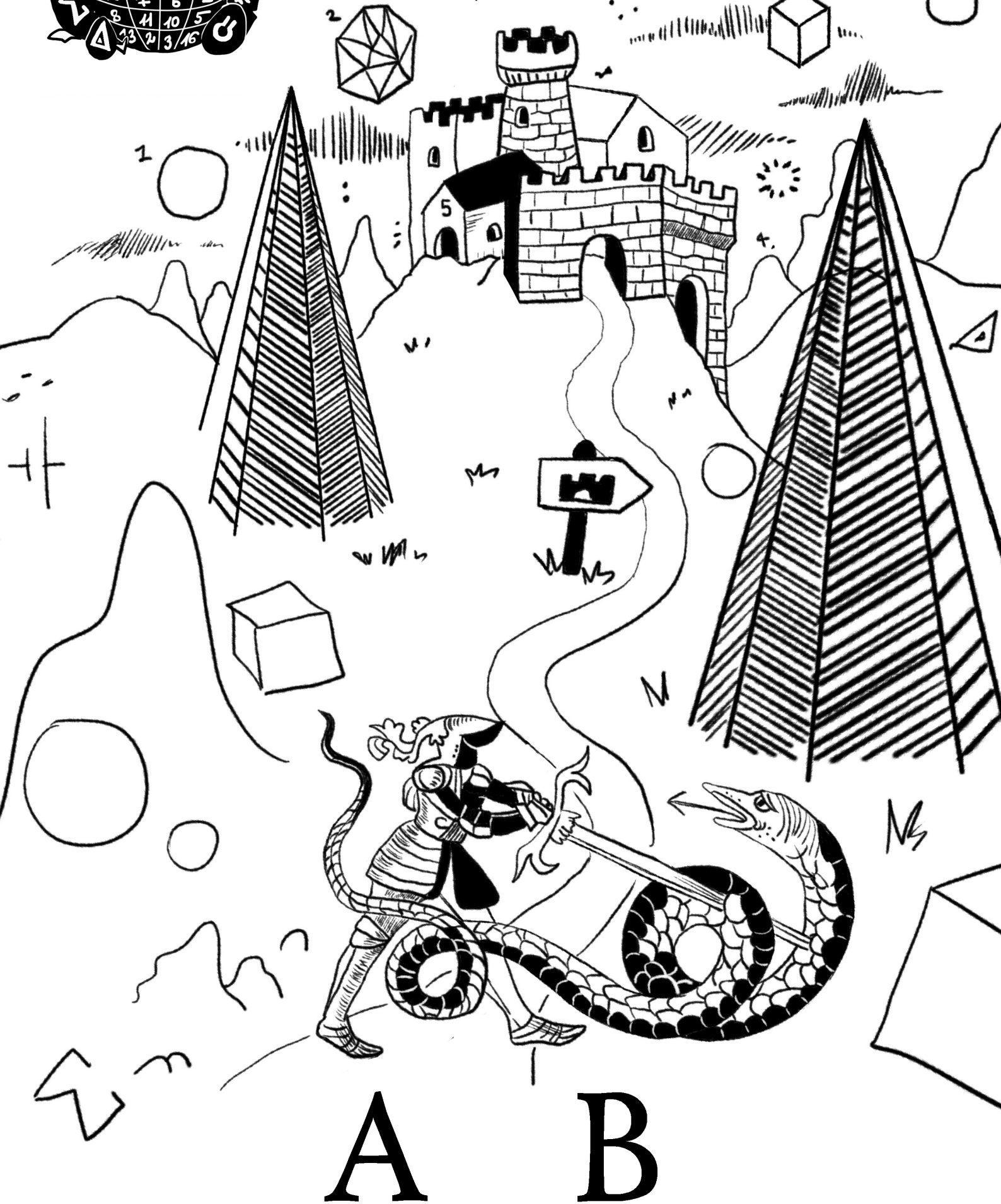




Dürer Verseny

2026. január 16-17.³

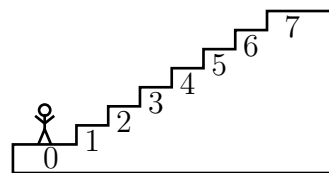


A B



A
kategória

1. Roxfortban Harry szobájához egy hétfokú lépcsőn vezet fel az út. Harry úgy szeretne felmenni a szobájához, hogy a 0-s lépcsőfokról indul, a 7-es lépcsőfokra érkezik, és közte az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os lépcsőfokokra lép rá valamilyen sorrendben, mindegyikre pontosan egyszer. Ezenkívül minden lépésben egy vagy két lépcsőfokot lép, lefelé vagy felfelé. Hányféleképpen juthat fel Harry a szobájához? Adjatok meg minél többféle sorrendet, aminek megfelelően Harry végigmehet a lépcsőfokokon.



Azt nem kell megindokolnotok, hogy más lehetőség miért nincsen. Két eset akkor különböző, ha Harry nem ugyanolyan sorrendben lép rá a lépcsőfokokra.

2. Áron egy 12 cm oldalhosszúságú négyzetet olyan kisebb négyzetekre vágott fel, amelyeknek oldalai cm-ben mérve egész számok. Ezután megszámlolta, hogy hány részre darabolta fel a négyzetet. Milyen számot kaphatott Áron? Mutassatok példát minél több 1-nél nagyobb, de 11-nél kisebb számra.

A feldarabolt részek közt lehetnek azonos és különböző méretűek is.

Ha egy számról úgy gondoljátok, hogy lehetséges, akkor mutassatok egy lehetséges példát a darabolásra. Ha úgy gondoljátok, hogy egy számra nem létezik példa, akkor azt nem kell megindokolnotok, hogy szerintetek miért nem létezik.

3. Felírtunk a táblára 3 számot: 6, 21, 42. Egy lépésben letörlünk egy számot a tábláról, a helyére pedig egy olyan egész számot írunk, ami a táblán maradt két szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa, amennyiben az pozitív egész. Tehát ha a táblán az a és b számok maradtak fent, akkor az újonnan felírt szám az $a + b$, $a - b$, $b - a$, $a \cdot b$, a/b , b/a számok valamelyike lehet.

a) Elérhető-e, hogy a táblán a 3, 6, 12 számok szerepeljenek?

b) Elérhető-e néhány lépés után az 5, 11, 16?

A táblán nem számít a számok sorrendje. Ha egy számhármast elérhetőnek gondoltok, akkor adjatok meg egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel el lehet oda jutni. Amennyiben azt gondoljátok, hogy egy számhármast nem elérhető, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem az.

4. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Dulifuli, Nótata, Okoska, Törpilla, Törpliliom, Törpvirág és Ügyifogyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

- Dulifuli: Ki nem állhatok utolsó lenni, de az lettem.
- Nótata: Elöttem és mögöttem is 3-3 törp végzett.
- Okoska: Szerencsére nem lettem utolsó, de Ügyifogyi jobban szerepelt nálam.
- Törpilla: Az utolsó három helyezett közt vagyok.
- Törpliliom: Okoska később végzett, mint én, de Törpilla előbb.
- Törpvirág: Én nyertem és Ügyifogyi is dobogós lett.
- Ügyifogyi: Nem Törpliliom és nem Törpvirág ért be közvetlenül előttem.

Milyen sorrendben végzett a hét törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

Írjátok le az állítások helyesnek vélt sorrendet, és azt is indokoljátok meg, hogy más sorrend miért nem fordulhatott elő.



A
kategória

5. Öt ember (Anita, Dani, Eszter, Kartal, Tamás) közt sakkbajnokságot rendeztek, ami során mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 2 pontot ér, a döntetlen 1-et, a vereség 0-t. A bajnokság végén mindenkinek 4 pontja lett. Hány döntetlen történhetett a bajnokság során?

Minden, általatok lehetségesnek gondolt döntetlenszámmra írjatok 1-1 példát a Válaszlapra. (A Válaszlapon több eset van, mint ahány példa lehetséges.) Azokról a számokról, amikről úgy gondoljátok, hogy nem lehetségesek, írjatok indoklást a Válaszlap hátuljára.

6. Egy mágikus ládában kilenc rekesz van 3×3 -as elrendezésben. Két játékos felváltva pakol köveket a láda rekeszeibe, minden rekeszbe legfeljebb egy kő rakható. A láda már kicsit rozoga, így ha egy sorban vagy oszlopban mindhárom rekeszben van kő, akkor a láda alja kiszakad. Az a játékos veszít, akinek a lépése után a láda kiszakad.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy ti vagy a szervező tegye le az első követ.



B
kategória

1. Áron felvágott egy 12 cm oldalú szabályos háromszöget néhány olyan kisebb szabályos háromszögre, amelyeknek az oldalai cm-ben mérve egész számok. Ezután megszámolta, hogy hány részre darabolta fel a háromszöget. Milyen számot kaphatott Áron? Mutassatok példát minél több 1-nél nagyobb, de 11-nél kisebb számra.

A feldarabolt részek közt lehetnek azonos és különböző méretűek is.

Ha egy számról úgy gondoljátok, hogy lehetséges, akkor mutassatok egy lehetséges példát a darabolásra. Ha úgy gondoljátok, hogy egy számra nem létezik példa, akkor azt nem kell megindokolnotok, hogy szerintetek miért nem létezik.

2. Felírtunk a táblára 3 számot: 6, 21, 42. Egy lépésben letörlünk egy számot a tábláról, a helyére pedig egy olyan egész számot írunk, ami a táblán maradt két szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa, amennyiben az pozitív egész. Tehát ha a táblán az a és b számok maradtak fent, akkor az újonnan felírt szám az $a + b$, $a - b$, $b - a$, $a \cdot b$, a/b , b/a számok valamelyike lehet.

a) Elérhető-e, hogy a táblán a 3, 6, 12 számok szerepeljenek?

b) Elérhető-e néhány lépés után az 5, 11, 16?

A táblán nem számít a számok sorrendje. Ha egy számhármast elérhetőnek gondoltok, akkor adjatok meg egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel el lehet oda jutni. Amennyiben azt gondoljátok, hogy egy számhármas nem elérhető, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem az.

3. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Dulifuli, Nótata, Okoska, Törpilla, Törpliliom, Törpvirág és Ügyifogyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

- Dulifuli: Ki nem állhatok utolsó lenni, de az lettem.
- Nótata: Elöttem és mögöttem is 3-3 törp végzett.
- Okoska: Szerencsére nem lettem utolsó, de Ügyifogyi jobban szerepelt nálam.
- Törpilla: Az utolsó három helyezett közt vagyok.
- Törpliliom: Okoska később végzett, mint én, de Törpilla előbb.
- Törpvirág: Én nyertem és Ügyifogyi is dobogós lett.
- Ügyifogyi: Nem Törpliliom és nem Törpvirág ért be közvetlenül előttem.

Milyen sorrendben végzett a hét törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

Írjátok le az állítások helyesnek vélt sorrendet, és azt is indokoljátok meg, hogy más sorrend miért nem fordulhatott elő.

4. Öt ember (Anita, Dani, Eszter, Kartal, Tamás) közt sakkbajnokságot rendeztek, ami során mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 2 pontot ér, a döntetlen 1-et, a vereség 0-t. A bajnokság végén mindenkinek 4 pontja lett. Hány döntetlen történhetett a bajnokság során?

Minden, állítások lehetségesnek gondolt döntetlenszámmra írjatok 1-1 példát a Válaszlapra. (A Válaszlapon több eset van, mint ahány példa lehetséges.) Azokról a számokról, amikről úgy gondoljátok, hogy nem lehetségesek, írjatok indoklást a Válaszlap hátuljára.



XIX. Dürer Verseny

B

kategória

Döntő (2026. január 16-17.)

Kifejtős Feladatsor

5. A Megyében 11 hobbit lakik, mindenki egyedül a saját hobbitüregében. Bármely hobbit-üreghez pontosan egy másik üreg van, ami a legközelebb van hozzá, és pontosan egy másik üreg van, ami a legtávolabb. Az egyik nap délelőttjén minden hobbit ellátogat ahhoz, akinek az ürege legközelebb van a sajátjához és ott ebédel. Ezután aznap délután minden hobbit ellátogat ahhoz a hobbitüreghez, ami a legmesszebb van attól, ahol ebédel, és itt tölti az éjszakát.

a) Legalább hány hobbitüreg nem üres az éjszaka folyamán?

b) Legfeljebb hány hobbitüregot használnak az éjszaka?

c) Legfeljebb hányan töltik a saját üregükben az éjszakát?

Minden feladatrészben mutassatok egy lehetséges példát az üregek elhelyezkedésére is és indokoljátok meg, hogy az adott részben a válaszotok miért a lehető legjobb.

6. Egy mágikus ládában kilenc rekesz van 3×3 -as elrendezésben. Két játékos felváltva pakol köveket a láda rekeszeibe, minden rekeszbe legfeljebb egy kő rakható. Az első lépésben a második játékos kijelöl egy sort vagy oszlopot, az első játékosnak pedig ebbe a sorba vagy oszlopba kell rakni a követ. Ezután az első játékos jelöl ki egy sort vagy oszlopot és a második játékos helyezi le a követ. Majd ezek a lépések ismétlődnek felváltva. A játék akkor ér véget, ha valaki nem tud követ lerakni a másik által kijelölt sorba vagy oszlopba, és az a játékos veszít, aki nem tudta a követ lehelyezni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy ti vagy a szervező rakja le az első követ.



A
kategória

A-1. Aslan, az Erdő ura minden reggel sétát tesz a birodalmában. Az idei év első napján 19 kilométert tesz meg. Ha egy nap páratlan számú kilométert sétál, akkor a következő nap eggyel többet tesz meg, ha pedig páros számú kilométert sétál, akkor a következő nap feleannyi kilométert tesz meg. Hány kilométert fog sétálni a 30. napon? (3 pont)

A-2. Harry és a felsőbb évfolyamosok szabadidejükben Roxmortsba látogattak. A délután folyamán 57-en ittak vajsört és 34-en vettek Bogoly Berti mindenízű drazséjából. Hányan vettek vajsört és mindenízű drazsét is, ha mind a 75-en vettek legalább az egyikből? (3 pont)

A-3. A Vörös Királynő és a Fehér Királynő dobókockákkal játszanak. Mindketten három kockával dobznak. A Vörös Királynő által dobott három szám szorzata 36, összege 11, a Fehér Királynő számainak szorzata 12, összege 8. Melyik szám szerepel mindkettőjük dobott számai közt? (3 pont)

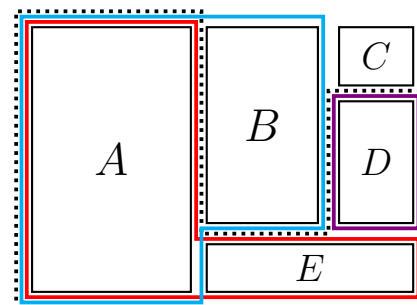
A-4. Aprajafalván Törpapa a törpjeit sorokba állítja egy ünnepségre. Azt veszi észre, hogyha minden sorba pontosan 3 törp áll, akkor 2 törp marad ki, ha pedig soronként pontosan 4-en állnak, akkor 1 marad ki. Hány törp marad ki, ha hatosával állítja őket sorba? (3 pont)

A-5. Egy hosszú autópálya mentén kilométerenként egy-egy számozott kilométerkő áll, az út elején nullás kővel kezdve. Egy fehér nyúl áll a 2026-os kilométerkő mellett. Egyszer csak a nyúl útnak indul, először egy kilométert ugrik csökkenő irányba, majd kettőt növekvőbe, és ezt folytatva felváltva ugrik a két irányba, mindig egy kilométerrel többet, mint előzőleg. A 2026 kilométer hosszú ugrása után megáll. Hányas kilométerkőnél áll ekkor? (4 pont)

Tudjuk, hogy ezalatt a nyúl sosem éri el az autópálya egyik végét sem.

A-6. Az alábbi térkép mutatja négy jóbarát reggeli futását: Benedek a piros, Benjamin a lila, Bogi a kék, Brigi a pontozott utat futotta végig. Hány métert tett meg ma reggel Brigi, ha Benedek 1300 m-t, Benjamin 400 m-t, Bogi pedig 1200 m-t futott?

Benedek az A és E, Benjamin a D, Bogi az A és B, Brigi pedig az A, D és E épületek együttesét futotta körbe. Az utcák vastagsága nem számít. (4 pont)



A-7. Ábris sült krumplit eszik szósszal, összesen 120 szál krumplija van. Ha minden krumpliját egyszer mártaná bele a szószba, akkor megmaradna a szósz negyede. Hány szálra nem maradna szósz, ha minden krumpliját kétszer mártaná bele a szószba? (4 pont)

Amíg van szósz, addig Ábris minden mártáskor ugyanannyi szószt rak egy sült krumplira.

A-8. Egy lottóhúzáson öt különböző számot húznak ki az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül. Eszter a lottóhúzás után az öt kihúzott szám közül az összes lehetséges módon összeadott két-két számot és az így kapott összegeket felírta magának. Ezek az összegek az 5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20 és a 24 voltak. Mennyi az öt kihúzott szám szorzata? (4 pont)



A
kategória

A-9. Egy erdei tisztáson lovak, emberek és kentaurok állnak. Minden ember vagy a saját lóva hátán érkezett vagy gyalog, és minden ló hátán pontosan egy ember jött. Tudjuk, hogy néggyel több kentaurok van, mint ló. Hány ember érkezett gyalog, ha összesen 110 lábat és 35 fejet számoltunk meg?

Egy kentaurnak 1 feje és 4 lába van.

(5 pont)

A-10. 1987. 06. 25. volt a legutóbbi olyan dátum, amely leírásához 8 különböző számjegyre volt szükség. Melyik évben lesz a legközelebbi ilyen dátum?

(5 pont)

A-11. Dulifuli felír egy kétjegyű számot a táblára, ami nem osztható tízzel, és a két számjegye különböző. Ezek után Ügyifogyi felcseréli ennek a számnak a jegyeit, és a kapott kétjegyű számot felírja Dulifuli száma mellé a táblára. Végül Okoska összeadja a két számot. Ezek alapján hány különböző eredményt kaphat Okoska?

(5 pont)

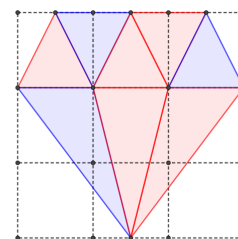
A-12. Hablaty az ábrán látható kilenc üres mezőbe egy-egy egész számot írt. Ezután észrevette, hogy minden sorban és oszlopban igaz az, hogy a szélső számokkal együtt öt különböző egymást követő szám szerepel valamilyen sorrendben. Mennyi a szürke mezőkbe írt számok szorzata?

(5 pont)

	6	4	5	
5				7
3				1
4				3
	3	2	8	

A-13. Egy négyzetrácsos lapon összekötöttünk néhány rácspontot és oldalfelező pontot, így az ábrán látható gyémánt alakot kaptuk. Hány cm^2 a kézzel színezett részek területeinek összege, ha az egész gyémánt területe 198 cm^2 ?

(6 pont)



A-14. Ki szeretnének tölteni az alábbi ábrát 1-től 9-ig a számjegyekkel úgy, hogy minden szám pontosan egyszer szerepeljen, valamint hogy az 5-ös számjegy ne középre kerüljön. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a bejelölt relációs jelek ($<$ és $>$) helyes irányba álljanak?

(6 pont)

$\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$
 $\vee \quad \vee \quad \vee$
 $\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$
 $\vee \quad \vee \quad \vee$
 $\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$

A-15. Az intergalaktikus birodalom XIX. bolygóján egy év 30 hónapból áll. A hónapok közül kettő 17 napos, öt 18 napos, tizenkilenc 19 napos, kettő 20 napos, kettő pedig 21 napos, de azt nem tudjuk, hogy ezek milyen sorrendben követik egymást. Az idei év a XIX. bolygón hétfővel kezdődött. Ezek alapján legfeljebb hány hónap kezdődhet hétfővel ebben az évben?

A bolygón a hetek, a Földhöz hasonlóan 7 nappal állnak.

(6 pont)

A-16. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek a számjegyeinek összege 11, de nem szerepel benne a 0-s számjegy?

(6 pont)



B
kategória

B-1. A Vörös Királynő és a Fehér Királynő dobókockákkal játszanak. Mindketten három kockával dobnak. A Vörös Királynő által dobott három szám szorzata 36, összege 11, a Fehér Királynő számainak szorzata 12, összege 8. Melyik szám szerepel mindkettőjük dobott számai közt? (3 pont)

B-2. Aprajafalván Törpapa a törpjeit sorokba állítja egy ünnepségre. Azt veszi észre, hogyha minden sorba pontosan 3 törpöt oszt, akkor 2 törp marad ki, ha soronként pontosan 4 törpöt oszt, akkor 1 marad ki, ha pedig pontosan 5-öt, akkor 4 marad ki. Hány törp marad ki, ha hatosával állítja őket sorba? (3 pont)

B-3. Egy hosszú autópálya mentén kilométerenként egy-egy számozott kilométerkő áll, az út elején nullás kővel kezdve. Egy fehér nyúl áll a 2026-os kilométerkő mellett. Egyszer csak a nyúl útnak indul, először egy kilométert ugrik csökkenő irányba, majd kettőt növekvőbe, és ezt folytatva felváltva ugrik a két irányba, mindig egy kilométerrel többet, mint előzőleg. A 2026 kilométer hosszú ugrása után megáll. Hányas kilométerkőnél áll ekkor?

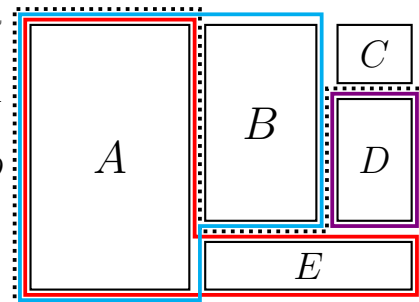
Tudjuk, hogy ezalatt a nyúl sosem éri el az autópálya egyik végét sem.

(3 pont)

B-4. Az alábbi térkép mutatja négy jóbarát reggeli futását: Benedek a piros, Benjamin a lila, Bogi a kék, Brigi a pontozott utat futotta végig. Hány métert tett meg ma reggel Brigi, ha Benedek 1300 m-t, Benjamin 400 m-t, Bogi pedig 1200 m-t futott?

Benedek az A és E, Benjamin a D, Bogi az A és B, Brigi pedig az A, D és E épületek együttesét futotta körbe. Az utcák vastagsága nem számít.

(3 pont)



B-5. Ábris sült krumplit eszik szósszal, összesen 120 szál krumplija van. Ha minden krumpliját egyszer mártaná bele a szószba, akkor megmaradna a szósz negyede. Hány szálra nem maradna szósz, ha minden krumpliját kétszer mártaná bele a szószba?

Amíg van szósz, addig Ábris minden mártáskor ugyanannyi szószot rak egy sült krumplira.

(4 pont)

B-6. Egy lottóhúzáson öt különböző számot húznak ki az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül. Eszter a lottóhúzás után az öt kihúzott szám közül az összes lehetséges módon összeadott két-két számot és az így kapott összegeket felírta magának. Ezek az összegek az 5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20 és a 24 voltak. Mennyi az öt kihúzott szám szorzata? (4 pont)

B-7. 1987. 06. 25. volt a legutóbbi olyan dátum, amely leírásához 8 különböző számjegyre volt szükség. Melyik évben lesz a legközelebbi ilyen dátum? (4 pont)

B-8. Dulifuli felír egy kétjegyű számot a táblára, ami nem osztható tízzel, és a két számjegye különböző. Ezek után Ügyifogyi felcseréli ennek a számnak a jegyeit, és a kapott kétjegyű számot felírja Dulifuli száma mellé a táblára. Végül Okoska összeadja a két számot. Ezek alapján hány különböző eredményt kaphat Okoska? (4 pont)

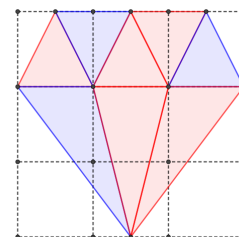


B
kategória

B-9. Hablaty az ábrán látható kilenc üres mezőbe egy-egy egész számot írt. Ezután észrevette, hogy minden sorban és oszlopban igaz az, hogy a szélső számokkal együtt öt különböző egymást követő szám szerepel valamilyen sorrendben. Mennyi a szürke mezőkbe írt számok szorzata? (5 pont)

	6	4	5	
5				7
3				1
4				3
	3	2	8	

B-10. Egy négyzetrácsos lapon összekötöttünk néhány rácspontot és oldalfelező pontot, így az ábrán látható gyémánt alakot kaptuk. Hány cm^2 a kékkel színezett részek területeinek összege, ha az egész gyémánt területe 198 cm^2 ? (5 pont)



B-11. Merlin 9 sárkánytojást talált, amiknek a színe piros, zöld vagy fekete, míg az alakja gömb, kocka vagy gyűrű. Minden színből és alakból is 3-3 tojás van, és minden tojás csak egyféle színű és alakú lehet. Azt is észrevette, hogy nincs két tojás, amiknek a színe és az alakja is ugyanolyan. Merlinnek a kiköltéshez úgy kell elhelyeznie a tojásokat egy 3×3 rekeszes dobozba, hogy megfeleljen az ábrának. Hányféleképpen helyezheti el így a tojásokat? (5 pont)

	Z	
	P	
F		F

B-12. Ki szeretnénk tölteni az alábbi ábrát 1-től 9-ig a számjegyekkel úgy, hogy minden szám pontosan egyszer szerepeljen, valamint hogy az 5-ös számjegy ne középre kerüljön. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a bejelölt relációs jelek ($<$ és $>$) helyes irányba álljanak? (5 pont)

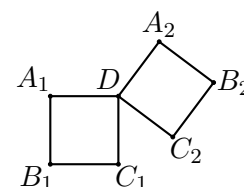
$\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$
$\vee \quad \vee \quad \vee$
$\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$
$\vee \quad \vee \quad \vee$
$\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$

B-13. Az intergalaktikus birodalom XIX. bolygóján egy év 30 hónapból áll. A hónapok közül kettő 17 napos, öt 18 napos, tizenkilenc 19 napos, kettő 20 napos, kettő pedig 21 napos, de azt nem tudjuk, hogy ezek milyen sorrendben követik egymást. Az idei év a XIX. bolygón hétfővel kezdődött. Ezek alapján legfeljebb hány hónap kezdődhet hétfővel ebben az évben?

A bolygón a hetek, a Földhöz hasonlóan 7 nappól állnak.

(6 pont)

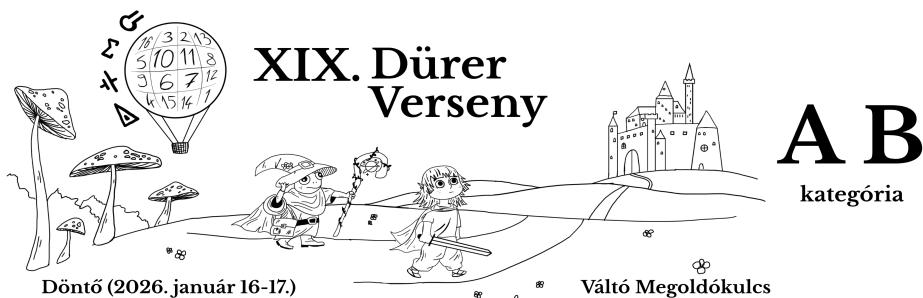
B-14. Gandalf felrajzolt a porba két 125 cm oldalhosszúságú négyzetet, melyeknek az egyik csúcsa közös. A négyzetek csúcsait elnevezte az ábra szerint. Tudjuk, hogy az A_1 és A_2 csúcsok távolsága 234 cm , valamint a B_1 és B_2 csúcsok távolsága 322 cm . Hány centiméter a C_1 és C_2 csúcsok távolsága? (6 pont)



B-15. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek a számjegyeinek összege 11, de nem szerepel benne a 0-s számjegy? (6 pont)

B-16. Alice szeretne vásárolni a Bolond Kalapostól. Alice-nél és a Bolond Kalaposnál is 5-5 darab pozitív egész és nem feltétlen különböző címletű pénzérme van. A vásárlás során Alice odaad néhány pénzérmet a Kalaposnak, aki visszaad a sajátjai közül néhány (akár 0 darab) pénzérmet. Azt veszik észre, hogy így Alice bármely egész értéket pontosan ki tud fizetni 1-től n -ig. Mi lehet n legnagyobb értéke?

Ha az Alice-nél lévő pénzérme értéké 1, 11, 42, 69 és 100, a Kalaposnál pedig 1, 1, 1, 1 és 7, akkor az 1, $2 = 11 - 7 - 1 - 1$, $3 = 11 - 7 - 1$, $4 = 11 - 7$, $5 = 11 + 1 - 7$ összegek kifizethetők, de a 6-ot már nem tudná kifizetni. (6 pont)



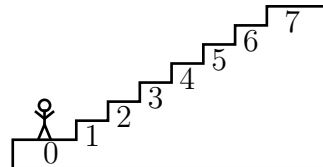
#	MO	A feladat szövege	P
A-1	2	Aslan, az Erdő ura minden reggel sétát tesz	3p
A-2	16	Harry és a felsőbb évfolyamosok szabadidejükben	3p
A-3	3	A Vörös Királynő és a Fehér Királynő dobókockákkal	3p
A-4	5	Aprajafalván Törpapa a törpjeit sorokba állítja egy ünnepségre.	3p
A-5	3039	Egy hosszú autópálya mentén kilométerenként	4p
A-6	1600	Az alábbi térkép mutatja négy jóbarát reggeli futását:	4p
A-7	40	Ábris sült krumplit eszik szósszal,	4p
A-8	4004	Egy lottóhúzáson öt különböző számot húznak ki	4p
A-9	7	Egy erdei tisztáson lovak, emberek és kentaurok állnak.	5p
A-10	2345	1987. 06. 25. volt a legutóbbi olyan dátum,	5p
A-11	15	Dulifuli felír egy kétjegyű számot a táblára,	5p
A-12	150	Hablaty az ábrán látható kilenc üres mezőbe egy-egy	5p
A-13	72	Egy négyzetrácsos lapon összekötöttünk néhány rácspontot	6p
A-14	24	Ki szeretnénk tölteni az alábbi ábrát 1-től 9-ig	6p
A-15	10	Az intergalaktikus birodalom XIX. bolygóján	6p
A-16	1021	Hány olyan pozitív egész szám van,	6p

#	MO	A feladat szövege	P
B-1	3	A Vörös Királynő és a Fehér Királynő dobókockákkal	3p
B-2	5	Aprajafalván Törpapa a törpjeit sorokba állítja egy ünnepségre.	3p
B-3	3039	Egy hosszú autópálya mentén kilométerenként	3p
B-4	1600	Az alábbi térkép mutatja négy jóbarát reggeli futását:	3p
B-5	40	Ábris sült krumplit eszik szósszal,	4p
B-6	4004	Egy lottóhúzáson öt különböző számot húznak ki	4p
B-7	2345	1987. 06. 25. volt a legutóbbi olyan dátum,	4p
B-8	15	Dulifuli felír egy kétjegyű számot a táblára,	4p
B-9	150	Hablaty az ábrán látható kilenc üres mezőbe egy-egy	5p
B-10	72	Egy négyzetrácsos lapon összekötöttünk néhány rácspontot	5p
B-11	6	Merlin 9 sárkánytojást talált, amiknek a színe	5p
B-12	24	Ki szeretnénk tölteni az alábbi ábrát 1-től 9-ig	5p
B-13	10	Az intergalaktikus birodalom XIX. bolygóján	6p
B-14	88	Gandalf felrajzolt a porba két 125 cm oldalhosszúságú négyzetet,	6p
B-15	1021	Hány olyan pozitív egész szám van,	6p
B-16	992	Alice szeretne vásárolni a Bolond Kalapostól.	6p



A
kategória

A1. Roxfortban Harry szobájához egy hétfokú lépcsőn vezet fel az út. Harry úgy szeretne felmenni a szobájához, hogy a 0-s lépcsőfokról indul, a 7-es lépcsőfokra érkezik, és közte az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os lépcsőfokokra lép rá valamilyen sorrendben, mindegyikre pontosan egyszer. Ezenkívül minden lépésben egy vagy két lépcsőfokot lép, lefelé vagy felfelé. Hányféleképpen juthat fel Harry a szobájához? Adjatok meg minél többféle sorrendet, aminek megfelelően Harry végigmehet a lépcsőfokokon.



Azt nem kell megindokolnotok, hogy más lehetőség miért nincsen. Két eset akkor különböző, ha Harry nem ugyanolyan sorrendben lép rá a lépcsőfokokra.

Megoldás: Vizsgáljuk meg a lehetséges feljutásokat aszerint, hogy használ-e 2 lépcsőfokos lépést, és amennyiben igen, hány darab 1 lépcsőfokos lépést lép az első 2 lépcsőfokos lépés előtt!

Ha Harry nem használ 2 lépcsőfokos lépést, akkor egyszer sem léphet visszafelé, hiszen az első visszalépéséig csak felfelé lépkedne, így a visszalépéssel kétszer lépne arra a lépcsőfokra, amelyre visszalép. Tehát ha nem használ 2 lépcsőfokos lépést, akkor Harry csak egyféleképpen juthat fel, méghozzá lépcsőfokokon a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sorrendben lépkedve.

Innentől kezdve feltételezzük, hogy Harry használ 2 lépcsőfokos lépést. Mivel hét egymás utáni 1 lépcsőfokos lépéssel feljutna már a szobájához, így az első 2 lépcsőfokos lépés előtt legfeljebb hatszor léphet 1 lépcsőfokot.

Ha az első 2 lépcsőfokos lépés előtt pontosan hatszor lépne 1-1 lépcsőfokokat, akkor feljutna a 6-os lépcsőfokig, ahonnan visszafelé már nem léphetne, így a következő lépése a 7. lépcsőfokra kellene legyen. Így azonban nem használ 2 lépcsőfokos lépést, tehát nincs olyan lehetőség, hogy lép 2 lépcsőfokos lépést és pontosan hatszor lép előtte 1 lépcsőfokokat.

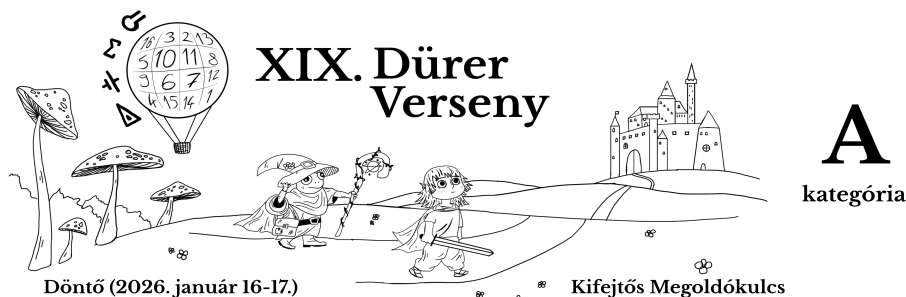
Ha az első 2 lépcsőfokos lépés előtt pontosan ötször lépne 1-1 lépcsőfokokat, akkor feljutna az 5-ös lépcsőfokra és már csak a 6-os lépcsőfokra léphetne, mielőtt fellép a 7-es lépcsőfokra. Mivel előbb a 6-os lépcsőfokra kell lépnie, mint a 7-esre, így az 5-ösről nincs olyan 2 lépcsőfokos lépés, amit léphet, tehát nincs ilyen lehetőség.

Ha az első 2 lépcsőfokos lépés előtt pontosan négyszer lép 1-1 lépcsőfokokat, akkor feljutása során a lépcsőfokok sorrendje az 0, 1, 2, 3, 4, 6-tal indul. Mivel így már csak az 5-ös lépcsőfokra léphet és kell is lépnie, mielőtt felér a 7-es lépcsőfokra, így a 6-ról mindenképp az 5-re kell lépnie, ahonnan fel tud lépni a 7-esre. Tehát ebben az esetben egy lehetséges feljutás van, ami során a 0, 1, 2, 3, 4, 6, 5, 7 sorrendben érinti a lépcsőfokokat.

Ha az első 2 lépcsőfokos lépés előtt pontosan háromszor lép 1-1 lépcsőfokokat, akkor feljutása során a lépcsőfokok sorrendje az 0, 1, 2, 3, 5-tel indul. Mivel így már csak a 4-es és 6-os lépcsőfokra léphet és kell is lépnie, mielőtt felér a 7-es lépcsőfokra, és a 4-es lépcsőfokról már csak a 6-osra léphet majd feljutása során, így az 5-ösről mindenképp a 4-esre kell lépnie, különben a 4-esre nem léphetne, mielőtt felér a szobájához. Tehát ebben az esetben egy lehetséges feljutás van, ami során az 0, 1, 2, 3, 5, 4, 6, 7 sorrendben érinti a lépcsőfokokat.

Ha az első 2 lépcsőfokos lépés előtt pontosan kétszer lép 1-1 lépcsőfokokat, akkor feljutása során a lépcsőfokok sorrendje az 0, 1, 2, 4-gyel indul. Hasonlóan a korábbiakhoz, innen a 3-as lépcsőfokra kell lépnie, mivel a 3-asra már csak az 5-ös lépcsőfokról lehet lépni, és a 3-asról csak az 5-ös lépcsőfokra lehet lépni a 4-esen kívül, így a lépései 1, 2, 4, 3, 5-el folytatódnak. Mivel már csak a 6-os lépcsőfokra kell rálépnie a 7-esre érés előtt, ebben az esetben is egy lehetséges feljutás van, ami során a 0, 1, 2, 4, 3, 5, 6, 7 sorrendben érinti a lépcsőfokokat.

Ha az első 2 lépcsőfokos lépés előtt pontosan egyszer lép 1 lépcsőfokot, akkor feljutása során a lépcsőfokok sorrendje az 0, 1, 3-mal indul. Innen a 2-es lépcsőfokra kell lépjen, mivel a 2-esre már csak az 4-es lépcsőfokról lehetne lépni a 3-ason kívül, azonban csak az 4-esre is lehetne továbblépni, így a 3-asról kell a 2-esre lépnie. Tehát az ilyen feljutása során a lépcsőfokok sorrendjének 0, 1, 3, 2, 4-el kell indulnia. Ekkor ha nem lép többször 2 lépcsőfokosat, akkor a feljutása során az 0, 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7



sorrendben érinti a lépcsőket. Ha lép még egyszer két lépcsőfokosát, akkor a következő két fokos lépését csak a 4-es lépcsőfokról lépheti, hiszen 5-ről már felérne a 7-esre, ami előtt a 6-ost még érintenie kell. Így az 0, 1, 3, 2, 4, 6, 5, 7 lehetséges feljutás is ezen esetben tartozik és más lehetőség nincs ebben az esetben.

Ha az első 2 lépcsőfokos lépés előtt nem lép 1 lépcsőfokot egyszer sem, a feljutásának a korábbiakhoz hasonlóan a 0, 2, 1, 3 lépcsőfokokkal kell kezdődnie ebben a sorrendben. Ha nem lép többször 2 lépcsőfokot, akkor a feljutása során a lépcsőfokokat 0, 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7 sorrendben érinti. Ha lép még 2 lépcsőfokot, akkor a következő két fokos lépését hasonlóan az előző esethez, csak a 3-as vagy 4-es lépcsőfokokról teheti, így a feljutásának sorrendje vagy 0, 2, 1, 3, 5, 4, 6, 7, vagy 0, 2, 1, 3, 4, 6, 5, 7 lehet, és más lehetőség nincs ebben az esetben.

Tehát a feljutása során az érintett lépcsőfokok sorrendje a következő lehet:

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- 0, 1, 2, 3, 4, 6, 5, 7
- 0, 1, 2, 3, 5, 4, 6, 7
- 0, 1, 2, 4, 3, 5, 6, 7
- 0, 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7
- 0, 1, 3, 2, 4, 6, 5, 7
- 0, 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7
- 0, 2, 1, 3, 5, 4, 6, 7
- 0, 2, 1, 3, 4, 6, 5, 7

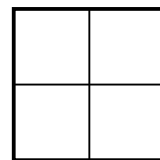
A2. Áron egy 12 cm oldalhosszúságú négyzetet olyan kisebb négyzetekre vágott fel, amelyeknek oldalai cm-ben mérve egész számok. Ezután megszámolta, hogy hány részre darabolta fel a négyzetet. Milyen számot kaphatott Áron? Mutassatok példát minél több 1-nél nagyobb, de 11-nél kisebb számra.

A feldarabolt részek közt lehetnek azonos és különböző méretűek is.

Ha egy számról úgy gondoljátok, hogy lehetséges, akkor mutassatok egy lehetséges példát a darabolásra. Ha úgy gondoljátok, hogy egy számra nem létezik példa, akkor azt nem kell megindokolnotok, hogy szerintetek miért nem létezik.

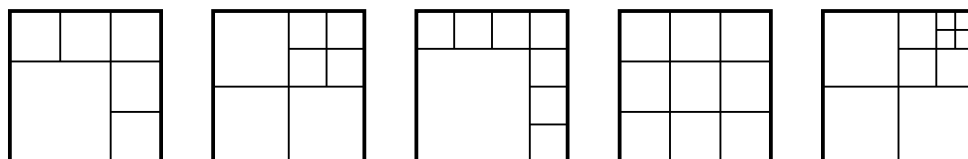
Megoldás: Vegyük észre, hogy mivel Áron legalább két négyzetre darabolta a négyzetet, így bármely rész legfeljebb 1 csúcsát tartalmazhatja az eredeti négyzetnek, különben a darab maga az egész négyzet lenne. Így minden rész legfeljebb 1 csúcsot tartalmaz az eredeti négyzet 4 csúcsából, tehát legalább 4 darab részre kellett a négyzetet darabolni.

Az ábrán könnyen láthatjuk, hogy darabolhatta Áron 4 négyzetre a négyzetet.

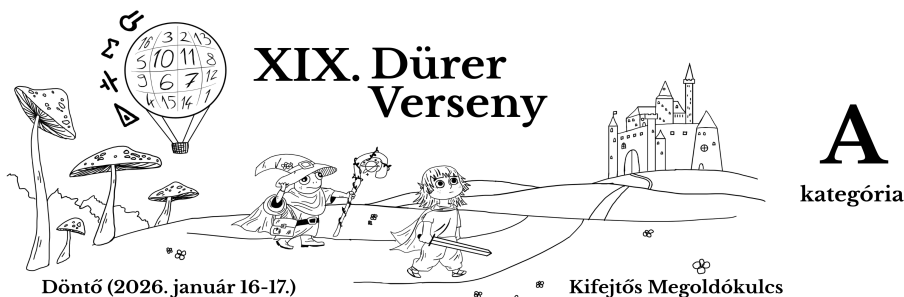


Következőnek belátjuk, hogy 5 négyzetre bontás nem lehetséges. A fentiek alapján a négyzet 4 csúcsát különböző négyzeteknek szükséges tartalmazniuk. Ha ezen négy rész közül két szomszédos oldalhosszá-
nak összege kisebb, mint 12 cm, akkor két csúcsot összekötő oldalt nem fedi a két rész le, így szükséges még egy négyzetnek tartalmaznia részt az eredeti négyzet azon oldalából. Mivel ha egy rész két oldal-
nak is tartalmazza részeit, az csúcsát is tartalmazza az eredeti négyzetnek, így az eredeti négyzet 4
oldalából legfeljebb 1 esetén lehetséges hogy az oldal két csúcsát tartalmazó részek oldalhosszainak
összege kisebb, mint 12 cm. Ekkor azonban a másik három oldalra annak teljesülése miatt, hogy az
oldal csúcsait tartalmazó négyzetek oldalhosszainak összege 12 cm, a négy csúcsot tartalmazó négyzet
oldalhosszai rendre a , $(6 - a)$, a és $(6 - a)$ cm kell legyenek, ekkor azonban hogy ne fedjék át egymást
ezen négyzetek, $a = 6$ szükséges, amikor a fenti, 4 részre darabolást kapjuk. Tehát 5 négyzetre nem
darabolható fel egy négyzet.

A maradék 6, 7, 8, 9 és 10 négyzetre darabolás lehetőségességét az alábbi ábrákon láthatjuk:



Tehát Áron a 4, 6, 7, 8, 9 és 10 számokat kaphatta.



A3. Felírtunk a táblára 3 számot: 6, 21, 42. Egy lépésben letörölünk egy számot a tábláról, a helyére pedig egy olyan egész számot írunk, ami a táblán maradt két szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa, amennyiben az pozitív egész. Tehát ha a táblán az a és b számok maradtak fent, akkor az újonnan felírt szám az $a + b$, $a - b$, $b - a$, $a \cdot b$, a/b , b/a számok valamelyike lehet.

a) Elérhető-e, hogy a táblán a 3, 6, 12 számok szerepeljenek?

b) Elérhető-e néhány lépés után az 5, 11, 16?

A táblán nem számít a számok sorrendje. Ha egy számhármaszt elérhetőnek gondoltok, akkor adjatok meg egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel el lehet oda jutni. Amennyiben azt gondoljátok, hogy egy számhármas nem elérhető, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem az.

Megoldás: a) Nem érhető el tetszőleges lépésszám után sem. Ugyanis ha elérhető lenne, akkor a táblán szereplő valamelyik két szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa lenne a harmadik szám. Ha az utolsóként felírt szám a 12, akkor ezt a 3-ból és a 6-ból kellett kapnunk, ami nem lehet, csak a $3 + 6 = 9$, $6 - 3 = 3$, $3 \cdot 6 = 18$ és a $6/3 = 2$ számokat írhattuk volna fel. Ha az utolsóként felírt szám a 6, akkor ezt a 3-ból és a 12-ből kellett kapnunk, ami nem lehet, csak a $3 + 12 = 15$, $12 - 3 = 9$, $3 \cdot 12 = 36$ és a $12/3 = 4$ számokat írhattuk volna fel. Ha az utolsóként felírt szám a 3, akkor ezt a 6-ból és a 12-ből kellett kapnunk, ami nem lehet, csak a $6 + 12 = 18$, $12 - 6 = 6$, $6 \cdot 12 = 72$ és a $12/6 = 2$ számokat írhattuk volna fel. Tehát nem érhető el, mert egyik esetben sem kaphattuk meg a harmadik számot.

b) Elérhető a következő módon. Első lépésben letöröljük a 42-t és felírjuk a 6, 21 mellé a $6 \cdot 21 = 126$ -ot. Második lépésben letöröljük a 6-ot és a 21, 126 mellé felírjuk a $126 - 21 = 105$ -öt. Harmadik lépésben letöröljük a 126-ot és a 21, 105 mellé felírjuk a $105/21 = 5$ -öt. Negyedik lépésben letöröljük a 105-öt és az 5, 21 mellé felírjuk a $21 - 5 = 16$ -ot. Ötödik lépésben letöröljük a 21-et és az 5, 16 mellé felírjuk a $16 - 5 = 11$ -et.

A4. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Dulifuli, Nótata, Okoska, Törpilla, Törpliliom, Törpvirág és Ügyifogyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

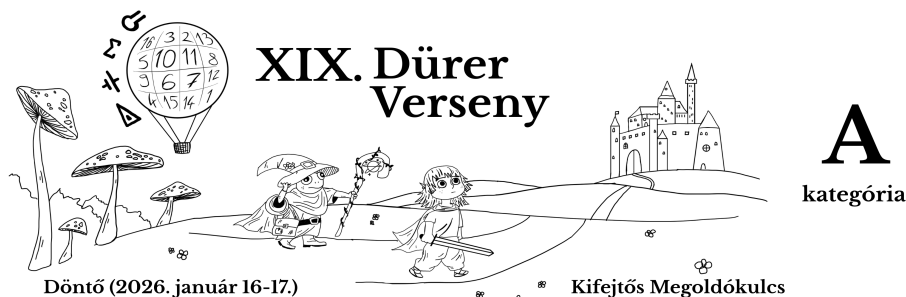
- Dulifuli: Ki nem állhatok utolsó lenni, de az lettem.
- Nótata: Elöttem és mögöttem is 3-3 törp végzett.
- Okoska: Szerencsére nem lettem utolsó, de Ügyifogyi jobban szerepelt nálam.
- Törpilla: Az utolsó három helyezett közt vagyok.
- Törpliliom: Okoska később végzett, mint én, de Törpilla előbb.
- Törpvirág: Én nyertem és Ügyifogyi is dobogós lett.
- Ügyifogyi: Nem Törpliliom és nem Törpvirág ért be közvetlenül előttem.

Milyen sorrendben végzett a hét törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

Írjátok le az állítások helyesnek vélt sorrendet, és azt is indokoljátok meg, hogy más sorrend miért nem fordulhatott elő.

Megoldás: Mivel egyvalaki tévedett, így nézzük meg, hogy vannak-e olyan állítások, amik nem lehetnek egyszerre igazak és akkor köztük lesz a téves válasz. Tegyük föl, hogy Törpilla, Törpliliom és Okoska is igazat mondott. Ekkor Törpilla az utolsó három helyezett között van, Törpliliom pedig mögötte végzett, de Okoska előtt. Ezért Törpilla 5., Törpliliom 6. és Okoska 7. lett, de ez ellentmond Okoska állításának, hiszen ő az utolsó. Tehát találtunk három választ, amik nem lehetnek igazak egyszerre. Akkor a többi törp igazat mondott, ezért Dulifuli utolsó (7.), Nótata 4. és Törpvirág 1. lett az állításaik alapján. Ügyifogyi az első három helyezett közt van és az (igaz) állítása szerint nem Törpvirág van előtte, ezért ő a 3. helyezett. Kimaradt a 2., 5. és 6. hely. Térjünk vissza a három kimaradt törpre, akik közül valaki tévedett és nézzük végig mind a három tévedési lehetőséget.

Ha Okoska tévedett, akkor mivel nem lehet utolsó Dulifuli miatt, így Ügyifogyi előtt kellett beérnie és ő a 2. helyezett. Ekkor Törpliliom 5. vagy 6. lett, vagyis Okoska mögött szerepelt, tehát két téves állításunk van, ami nem lehet.



Ha Törpilla tévedett, akkor neki kell lennie a 2. helyezettnek. Törpliliom az 5., így Okoska mögötte szerepelhet, de nem lesz utolsó. Ebben az esetben mindenki igazat állított, kivéve Törpillát.

Ha Törpliliom tévedett, akkor Ügyifogyi állítása miatt nem lehet 2. helyezett. Törpilla se lehet, tehát Okoska a 2., de akkor Ügyifogyi előtt végzett. Így ismét két téves állításunk van.

Minden esetet megvizsgáltunk és csak egyben nem jutottunk ellentmondásra. A sorrend: Törpvirág, Törpilla, Ügyifogyi, Nótata, Törpliliom, Okoska, Dulifuli.

A5. Öt ember (Anita, Dani, Eszter, Kartal, Tamás) közt sakkbajnokságot rendeztek, ami során mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 2 pontot ér, a döntetlen 1-et, a vereség 0-t. A bajnokság végén mindenkinek 4 pontja lett. Hány döntetlen történhetett a bajnokság során?

Minden, általatok lehetségesnek gondolt döntetlenszámmra írjatok 1-1 példát a Válaszlapra. (A Válaszlapon több eset van, mint ahány példa lehetséges.) Azokról a számokról, amikről úgy gondoljátok, hogy nem lehetségesek, írjatok indoklást a Válaszlap hátuljára.

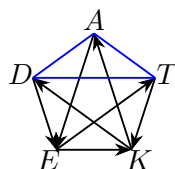
Megoldás: Először azt nézzük meg, hogy milyen módokon lehet a bajnokság végén valakinek 4 pontja. Mivel öten játszanak a bajnokságban, ezért mindenki négy-négy sakkpartit játszik. Kettőnél többször senki sem nyerhet, mivel két győzelemmel már 4 pontja van a játékosnak. Így lehetséges, hogy valaki 2 győzelemmel és 2 vereséggel zárta a bajnokságot vagy 1 győzelem mellett 2 döntetlennel és 1 vereséggel. Ha pedig nem nyert egy játszmát sem valaki, akkor a 4 pontot csak úgy tudja elérni, hogy mind a 4 meccsen döntetlent játszott. Tehát ezen a három módon lehetséges, hogy egy személy 4 pontot szerezzen a bajnokság során. Vegyük észre, hogy mind a három esetben az adott játékos páros sok döntetlent játszott (0, 2 vagy 4-et).

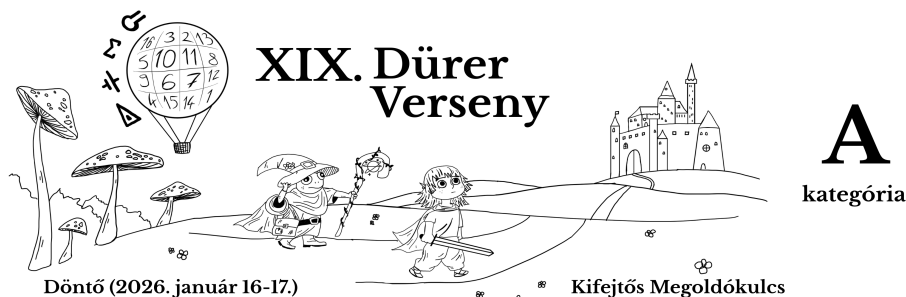
A bajnokság során mindenki 4 partit játszott és egy partit ketten játszanak, azaz összesen $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ sakkjátszma zajlott le. Az nem lehetséges, hogy egyetlen döntetlen született, mivel ekkor a döntetlent játszó két versenyzőnek 1 döntetlenje lenne, ami nem lehetséges, mert ez nem páros. Az sem lehet, hogy pontosan 2 döntetlen született, hiszen az első döntetlent játszó két játékos közül mindkettejüknek kellett, hogy legyen még egy döntetlen partija, így ekkor már legalább 3 döntetlen volt a bajnokságban. Az sem lehet, hogy 9 döntetlen született, hiszen ekkor az összes meccs közül csupán egy győzelemmel eldőlt volt és ennek a partinak a két játékosa ez esetben $4 - 1 = 3$ döntetlennel zárná a bajnokságot, ami nem lehetséges. Hasonlóan az sem lehet, hogy 8 döntetlen volt, hiszen ekkor két meccs nem lett döntetlen, viszont az első eldőlt meccs győztesének és vesztesének is kellett, hogy legyen további nem döntetlen partija, azaz ekkor már legalább 3 nem döntetlen volt a bajnokságban.

Így maradtak a következő lehetőségek: 0, 3, 4, 5, 6, 7, illetve 10 döntetlen. Ezek mind megvalósulhattak a feltételeknek megfelelően. Gondoljunk úgy a versenyzőkre, hogy egy asztal körül ülnek öten Anita, Dani, Eszter, Kartal és Tamás sorrendben (rájuk inntól a neveik kezdőbetűjével hivatkozunk).

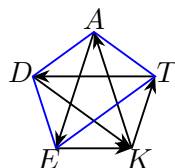
0 döntetlen: ha mindenki az asztalnál a tőle jobbra ülő versenyzőt és a tőle kettővel jobbra ülő versenyzőt győzte le, a tőle balra ülőktől pedig kikapott, akkor egy olyan bajnokságot kapunk, ahol mindenkinek 2 győzelme és 2 veresége van, azaz mindenki 4 ponttal zárt valóban. Így ez az eset lehetséges.

3 döntetlen: ha Anita, Dani és Tamás egymást közt csupa döntetlent játszanak, míg Eszter és Kartal közül Esztert Anita és Dani, Kartalt pedig Tamás győzi le hármuk közül, akkor Anitának, Daninak és Tamásnak is 4-4 pontja lesz. Kartalnak eddig két győzelme volt, míg Eszternek csak egy, így ha Eszter legyőzi Kartalt az ábrán látható módon, akkor mindenkinek 4 pontja lesz. Tehát 3 döntetlen is lehetséges.

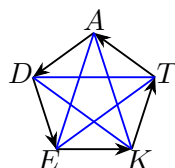




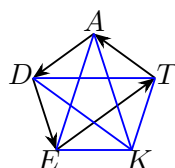
4 döntetlen: ha Eszter, Kartal és Anita körbeverik egymást az ábrán látható módon (azaz Eszter legyőzi Kartalt, aki legyőzi Anitát, aki viszont legyőzi Esztert), továbbá hasonlóan Dani, Kartal és Tamás is körbeverik egymást, akkor Kartalnak 4 pontja lesz, míg a többieknek kettő-kettő. A maradék 4 parti Anita, Dani, Eszter és Tamás között legyen döntetlen, amivel nekik is $2 + 1 + 1 = 4$ pontjuk lesz. Ez az eset is lehetséges.



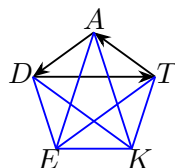
5 döntetlen: az asztalnál mindenki győzze le a tőle közvetlenül jobbra ülő játékost és így kapjon ki a tőle közvetlenül balra ülőtől. A többi 5 játszma eredménye legyen döntetlen. Ekkor mindenkinek egy győzelme, két döntetlenje és egy veresége lesz, azaz valóban 4 ponttal zárják a bajnokságot. Tehát ez az eset is lehetséges.



6 döntetlen: ha Dani megveri Esztert, aki megveri Tamást, aki megveri Anitát, aki pedig megveri Danit, akkor ebből a 4 meccsből mind a négyüknek 2 pontja lesz. Az összes többi 6 meccs legyen döntetlen, így mind a négyüknek $2 + 1 + 1 = 4$ pontja lesz, míg Kartal 4 döntetlennel szintén 4 ponton zár. Ez az eset is lehetséges.

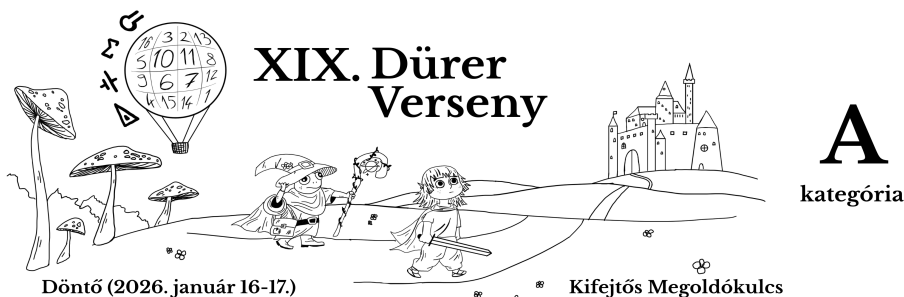


7 döntetlen: ha Dani, Tamás és Anita körbeverik egymást, rajtuk kívül pedig az összes parti döntetlennel zárul, akkor Eszter és Kartal 4-4 döntetlennel végez, míg a többiek egy győzelem mellett két-két döntetlennel, azaz mindenkinek 4 pontja lesz. Ez az eset is lehetséges.



10 döntetlen: ha az összes játszma eredménye döntetlen lett, akkor mindenki 4 döntetlennel, azaz 4 ponttal zárt, tehát ez az eset is lehetséges.

Tehát 0, 3, 4, 5, 6, 7 és 10 döntetlen lehetett a bajnokságban.



A6. Egy mágikus ládában kilenc rekesz van 3×3 -as elrendezésben. Két játékos felváltva pakol köveket a láda rekeszeibe, minden rekeszbe legfeljebb egy kő rakható. A láda már kicsit rozoga, így ha egy sorban vagy oszlopban mindhárom rekeszben van kő, akkor a láda alja kiszakad. Az a játékos veszít, akinek a lépése után a láda kiszakad.

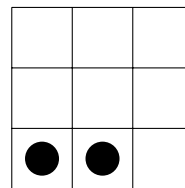
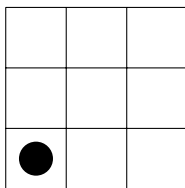
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy ti vagy a szervező tegye le az első követ.

Megoldás: A második játékosnak van nyerő stratégiája.

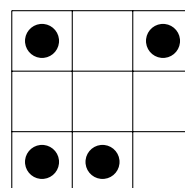
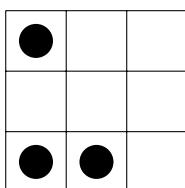
A megoldás alapja a következő észrevétel: Ha 7 kő van a ládában, akkor valaki veszített. Ez azért igaz, mert ha még senki sem veszített, akkor minden oszlopban legfeljebb két kő lehet, vagyis összesen legfeljebb 6 kő lehet a ládában. Vegyük észre továbbá, hogy 6 kőnek van olyan elrendezése, hogy semelyik oszlopban és semelyik sorban sincs három. Ehhez válasszunk ki három mezőt, melyek közül semelyik kettő nincs egy sorban vagy oszlopban, és rakjunk a többi hat mezőre egy-egy követ.

Az alábbiakban megadunk egy stratégiát, amellyel a második játékos tud úgy lerakni köveket az első három lépésénél, hogy addig ne veszítsen. Ha ezt sikerül elérnie, ekkor a táblán hat kavics lesz, így a következő lépésben az első játékos bárhogyan is rakja le a hetedik kavicsot, az első játékos veszíteni fog az észrevétel miatt.

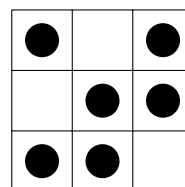
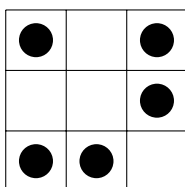
A stratégia: Az Első játékos először lerak valahova egy követ. Erre Második válasza, hogy lerak egy követ ugyanabba a sorba. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ebben a sorban a harmadik mező maradt üres.

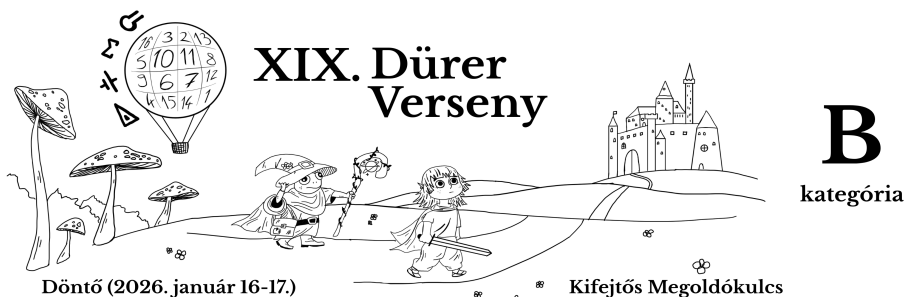


Ezek után Elsőnek egy új sorba kell követ raknia, különben veszítene. Ekkor Második a második lépésében abba a sorba tesz követ, és arra figyel, hogy a lépése után ezen sor harmadik mezőjében legyen kő. Ezt el tudja érni, hiszen ha Első a harmadik mezőre rakott akkor Másodiknak két választása van, ha pedig Első nem a harmadik mezőre rakott, akkor a harmadik mezőre rak. Ekkor tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy ebben a sorban a második mező maradt üresen.



Ekkor mit léphet Első? Nyilván nem rakhat kavicsot azokba a sorokba, ahol már van kavics, ezért a még üres sorba kell raknia. Viszont ennek a sornak az első mezőjébe sem rakhat, mert akkor az első oszlop megtelne. Vagyis ekkor az Első csak két mezőre rakhat kavicsot, hogy ne veszítsen. Viszont bármelyiket is választja ezek közül, Második rakhat kavicsot a másikra. Ezzel elértük, hogy a hat kő legyen a ládában, így a következő lépésben Első bármit is lép, veszíteni fog.





B1. Áron felvágott egy 12 cm oldalú szabályos háromszöget néhány olyan kisebb szabályos háromszögre, amelyeknek az oldalai cm-ben mérve egész számok. Ezután megsámolta, hogy hány részre darabolta fel a háromszöget. Milyen számot kaphatott Áron? Mutassatok példát minél több 1-nél nagyobb, de 11-nél kisebb számra.

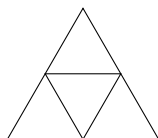
A feldarabolt részek közt lehetnek azonos és különböző méretűek is.

Ha egy számról úgy gondoljátok, hogy lehetséges, akkor mutassatok egy lehetséges példát a darabolásra. Ha úgy gondoljátok, hogy egy számra nem létezik példa, akkor azt nem kell megindokolnotok, hogy szerintetek miért nem létezik.

Megoldás: Vegyük észre, hogy mivel Áron legalább két szabályos háromszögre darabolta az eredeti háromszöget, így bármely rész legfeljebb 1 csúcsát tartalmazhatja az eredeti háromszögnek, különben a darab maga az egész háromszög lenne. Így minden rész legfeljebb 1 csúcsot tartalmaz az eredeti háromszög 3 csúcsából, tehát legalább 3 darab részre kellett a szabályos háromszöget darabolni.

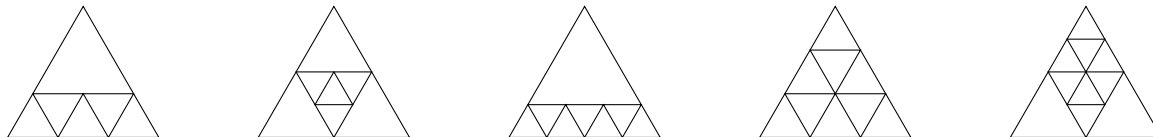
3 szabályos háromszögre se darabolhatta Áron a háromszöget, ekkor az előző érvelés miatt a három háromszög mindegyike tartalmazza a háromszög egy csúcsát. Az egyik oldalt nézve, az oldal két csúcsához tartozó szabályos háromszögeknek kell fednie az oldalt, különben még legalább egy háromszöggel (ami nem lehet a harmadik csúcsnál lévő háromszög) kellene lefedni az oldalt. Ahol összeérnek az oldalt fedő háromszögek, azt a pontot még legalább egy háromszögnek kell fednie, ami szintén nem lehet a harmadik csúcsnál lévő háromszög, vagyis három háromszögre nem darabolhatta Áron.

4 szabályos háromszögre könnyen láthatjuk, hogy bonthatta Áron a szabályos háromszöget:



5 szabályos háromszögre nem darabolhatta Áron a szabályos háromszöget. Ha minden csúcsot egy-egy 6 cm oldalhosszú szabályos háromszöggel fedünk, akkor megkapjuk a 4 háromszöges konstrukciót, így még a közepén lévő szabályos háromszöget kellene két szabályos háromszögre bontani, amit már láttunk, hogy lehetetlen. Ha nem minden csúcsnál egy 6 cm oldalhosszú háromszög van, akkor az egyik oldal pontjai nincsenek teljesen fedve, ehhez kell még legalább egy háromszög és ahol ezek a háromszögek érintkeznek, ott kell még legalább két háromszög. Ez az öt háromszög semelyike se lehet a harmadik csúcsot fedő szabályos háromszög, ekkor kellene legalább hat háromszög. Vagyis öt szabályos háromszögre nem darabolhatott Áron.

A maradék 6, 7, 8, 9 és 10 szabályos háromszögre darabolás lehetőségességét az alábbi ábrákon láthatjuk:



Tehát Áron a 4, 6, 7, 8, 9 vagy 10 számokat kaphatta.

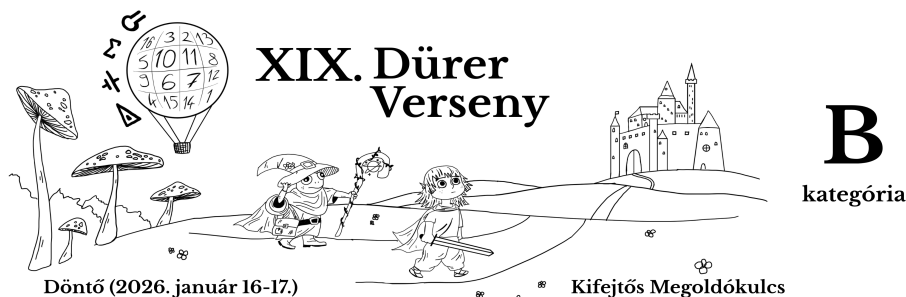
B2. Felírtunk a táblára 3 számot: 6, 21, 42. Egy lépésben letörlünk egy számot a tábláról, a helyére pedig egy olyan egész számot írunk, ami a táblán maradt két szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa, amennyiben az pozitív egész. Tehát ha a táblán az a és b számok maradtak fent, akkor az újonnan felírt szám az $a + b$, $a - b$, $b - a$, $a \cdot b$, a/b , b/a számok valamelyike lehet.

a) Elérhető-e, hogy a táblán a 3, 6, 12 számok szerepeljenek?

b) Elérhető-e néhány lépés után az 5, 11, 16?

A táblán nem számít a számok sorrendje. Ha egy számhármast elérhetőnek gondoltok, akkor adjatok meg egy lehetséges lépéssorozatot, amellyel el lehet oda jutni. Amennyiben azt gondoljátok, hogy egy számhármast nem elérhető, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem az.

Megoldás: A **B2.** feladat megegyezett az A kategória 3. feladatával, megoldása az A kategória megoldókulcsában olvasható.



B3. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Dulifuli, Nótata, Okoska, Törpilla, Törpliliom, Törpvirág és Ügyifogyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

- Dulifuli: Ki nem állhatok utolsó lenni, de az lettem.
- Nótata: Elöttem és mögöttem is 3-3 törp végzett.
- Okoska: Szerencsére nem lettem utolsó, de Ügyifogyi jobban szerepelt nálam.
- Törpilla: Az utolsó három helyezett közt vagyok.
- Törpliliom: Okoska később végzett, mint én, de Törpilla előbb.
- Törpvirág: Én nyertem és Ügyifogyi is dobogós lett.
- Ügyifogyi: Nem Törpliliom és nem Törpvirág ért be közvetlenül előttem.

Milyen sorrendben végzett a hét törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

Írjátok le az állatok helyesnek vélt sorrendet, és azt is indokoljátok meg, hogy más sorrend miért nem fordulhatott elő.

Megoldás: A **B3.** feladat megegyezett az A kategória 4. feladatával, megoldása az A kategória megoldókulcsában olvasható.

B4. Öt ember (Anita, Dani, Eszter, Kartal, Tamás) közt sakkbajnokságot rendeztek, ami során mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 2 pontot ér, a döntetlen 1-et, a vereség 0-t. A bajnokság végén mindenkinek 4 pontja lett. Hány döntetlen történhetett a bajnokság során?

Minden, állatok lehetségesnek gondolt döntetlenszámmra írjátok 1-1 példát a Válaszlapra. (A Válaszlapon több eset van, mint ahány példa lehetséges.) Azokról a számokról, amikről úgy gondoljátok, hogy nem lehetségesek, írjátok indoklást a Válaszlap hátuljára.

Megoldás: A **B4.** feladat megegyezett az A kategória 5. feladatával, megoldása az A kategória megoldókulcsában olvasható.

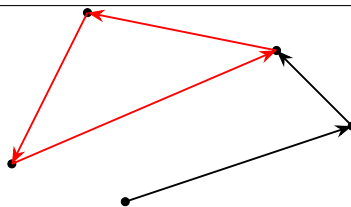
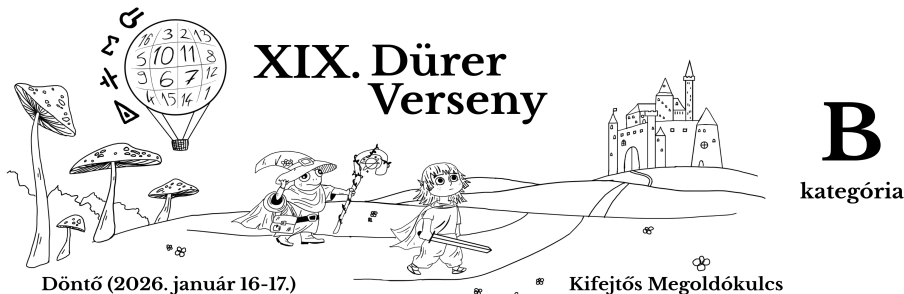
B5. A Megyében 11 hobbit lakik, mindenki egyedül a saját hobbitüregében. Bármely hobbitüreghez pontosan egy másik üreg van, ami a legközelebb van hozzá, és pontosan egy másik üreg van, ami a legtávolabb. Az egyik nap délelőttjén minden hobbit ellátogat ahhoz, akinek az ürege legközelebb van a sajátjához és ott ebédel. Ezután aznap délután minden hobbit ellátogat ahhoz a hobbitüreghez, ami a legmesszebb van attól, ahol ebédelt, és itt tölti az éjszakát.

- Legalább hány hobbitüreg nem üres az éjszaka folyamán?
- Legfeljebb hány hobbitüreg használnak az éjszaka?
- Legfeljebb hányan töltik a saját üregükben az éjszakát?

Minden feladatrészben mutassatok egy lehetséges példát az üregek elhelyezkedésére is és indokoljátok meg, hogy az adott részben a választok miért a lehető legjobb.

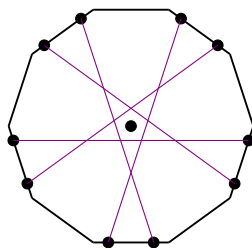
Megoldás: a) Legalább egy hobbitüreg nem lesz üres, hiszen minden hobbit a 11 üreg valamelyikében tölti az éjszakát. Megmutatjuk, hogy el lehet úgy helyezni a 11 üreget, hogy mindenki ugyanabban az üregben töltse az éjszakát. Ehhez helyezzük el az üregeket a számegyenesre úgy, hogy az első üreget a 0-ra, a következőt pedig az 1-re tesszük. Ezt követően mindig a legutóbb letett üreg kétszeresénél eggyel nagyobb számra tegyük le. Így az üregek a 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023 számokon lesznek. Ekkor minden üregtől az utolsó üreg lesz a legtávolabb, és délben senki nem lesz abban az üregben, így az éjszakát mindenki ebben az üregben fogja tölteni.

b) Először megmutatjuk, hogy nem lehet, hogy minden üreget használnak éjszaka. Induljunk ki egy tetszőleges üregből, és húzzunk egy nyilat abba az üregbe, ahol az üregünk lakója ebédel. Ezután ebből az üregből húzzunk hasonlóan egy nyilat abba az üregbe, ahol ennek a lakója ebédel, és ezt ismétljük addig, amíg visszaérünk egy olyan üregbe ahol már jártunk. Így a nyilak sorozatában lesz egy rész, amik néhány csúcs között egy kört tesznek meg.

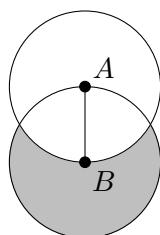


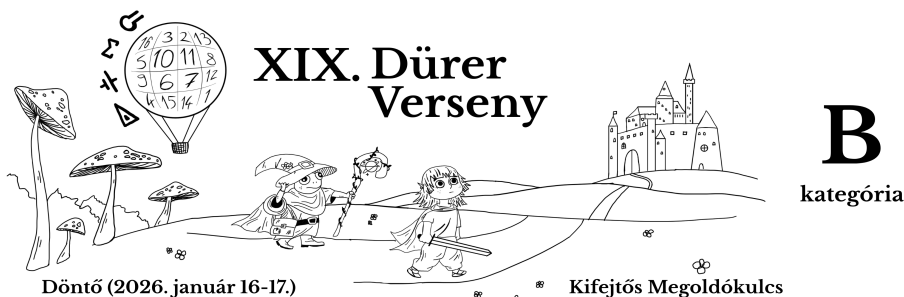
Vegyük észre, hogy minden behúzott nyíl vagy abba az üregbe mutat, ahonnan az aktuális üregbe érkeztünk, vagy ha máshová mutat, akkor rövidebb, mint az a nyíl, amin ide jutottunk (hiszen ha hosszabb lenne, akkor helyette visszamennénk az előző üregbe). Ha a kör több mint kettő nyílt tartalmaz, akkor minden nyíl hosszabb az előzőnél, de ekkor az a nyíl, amin visszaértünk egy már meglátogatott üregbe, rövidebb, mint az összes korábbi él, így annál is, amin innen kimentünk. De ekkor ebből a csúcsból nem oda mentünk volna, ahová a nyíl szerint mentünk, tehát ez nem lehet. Mivel az üregek száma páratlan, lesz legalább egy üreg, amibe nem lép be nyíl, azaz senki nem ebédel ott. Ekkor legfeljebb 10 üregben ebédel valaki és ebből a 10 üregből legfeljebb 10 üregbe mehetnek át éjszakára.

Most mutatunk egy konstrukciót, amiben 10 üreget használnak éjszaka. Helyezzünk el 10 üreget egy 8 egység oldalú szabályos 10-szög oldalain úgy, hogy minden második oldalon van 2 üreg a két csúcstól 1 egység távolságra, a többi oldalra pedig ne tegyünk üreget. A maradék egy üreget tegyük a szabályos tíszög középpontjába és toljuk el 0.1 egységgel egy másik üreg irányába (valójában bármilyen pont jó, ami a másik 10 üregtől több, mint 6 távolságra van, és van hozzá egy egyértelmű legközelebbi és legtávolabbi üreg). Ekkor könnyen látható, hogy tíszög egy oldalán lévő két hobbit délelőtt helyett cserél, így a tíszög oldalain lévő mind a 10 üregben lesz hobbit délben (a középső szintén ezek egyikében lesz). Minden ilyen üregtől a legtávolabbi a “vele majdnem szemközi” üreg lesz, amiket párba tudunk állítani az ábrán látható módon, és ezen párok éjszakára helyet fognak cserélni, így éjszaka is lesz ebben a 10 üregben hobbit.



c) Az a) részben mutatott konstrukcióban az utolsó (a 0-tól legtávolabb lakó) hobbit a saját üregében tölti az éjszakát. Megmutatjuk, hogy 1-nél több hobbit nem töltheti a saját üregében az éjszakát. Jelölje a A egy olyan hobbit üregét, aki otthon tölti az éjszakát. Ez csak úgy lehetséges, hogy A -hoz egy B üreg van a legközelebb, és a B üregtől viszont A van a legtávolabb. Ekkor A -n kívül minden üreg az ábrán a színezett területen található.





Legyen C egy A -n és B -n kívüli üreg. Ekkor a hozzá legközelebbi üreg nem lehet A , hiszen A -hoz B közelebb van. Ha B a legközelebbi üreg, akkor az éjszakát C lakója is A -ban tölti, így nem lehet a saját üregében. Így tehát elég megnézni azt az esetet, ha a C -hez legközelebbi üreg D , ami A -tól és B -től is különböző. Ekkor C és D távolsága kisebb mint C és B távolsága, ami kisebb, mint A és B távolsága, ami kisebb, mint A és D távolsága, ezért D -ből biztosan nem megy vissza C -be éjszakára (hiszen A messzebb van tőle, mint C). Tehát az egyetlen üreg, aminek a lakója otthon tölti az éjszakát, az A -val jelölt üreg.

B6. Egy mágikus ládában kilenc rekesz van 3×3 -as elrendezésben. Két játékos felváltva pakol köveket a láda rekeszeibe, minden rekeszbe legfeljebb egy kő rakható. Az első lépésben a második játékos kijelöl egy sort vagy oszlopot, az első játékosnak pedig ebbe a sorba vagy oszlopba kell rakni a követ. Ezután az első játékos jelöl ki egy sort vagy oszlopot és a második játékos helyezi le a követ. Majd ezek a lépések ismétlődnek felváltva. A játék akkor ér véget, ha valaki nem tud követ lerakni a másik által kijelölt sorba vagy oszlopba, és az a játékos veszít, aki nem tudta a követ lehelyezni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy ti vagy a szervező rakja le az első követ.

Megoldás: Az a játékos tud nyerni, aki először tud lehelyezni egy követ úgy, hogy egy sorban vagy oszlopban mindhárom helyen legyen kő, mert ekkor azt jelöli ki a következő lépés során és a másik játékos nem fog tudni lépni.

Az első játékos meg tudja nyerni a játékot, megadunk számára egy nyerő stratégiát. Az első lépésben tetszőleges helyre rakhat le a kijelölt sorból vagy oszlopból, majd jelölje ki a lerakott kő sorát.

●		

●	●	

Ezután ha a második úgy jelöl ki, hogy be tudja fejezni az első ezt a sort, akkor fejezze be és jelölje ki ezt a sort, ezzel nyerjen. Ha a második nem így jelölt, akkor megint rakjon az első játékos tetszőlegesen követ, majd megint jelölje ki a lerakott kő sorát.

●		
●	●	

●		●
●	●	

Akárhogyan játszott a második, a következő lépésben az első játékos ki tud alakítani egy teli oszlopot vagy sort, majd azt kijelölve nyerni. Ha a második oszlopot jelöl ki, akkor vagy az egyik sort tudja betölteni vagy mindkét már használt sorból van már ebben az oszlopban, akkor az egyetlen lehetséges lépésével az oszlopot telíti be. Ha már használt sort jelöl ki a második, akkor ez első azt betölíti. Négy kő lehelyezésével az egyik oszlopban lesz legalább két kő, mivel minden oszlopban legfeljebb egy kő csak összesen legfeljebb három lenne, a mi esetünkben két sort használtunk, így lesz egy oszlop, amiben pontosan két kő van. Emiatt ha a második az eddig használatlan sort jelöli ki, akkor az első játékos be tudja telíteni azt az oszlopot, amelyikben két kő volt.



A
kategória

A1. Aslan, az Erdő ura minden reggel sétát tesz a birodalmában. Az idei év első napján 19 kilométert tesz meg. Ha egy nap páratlan számú kilométert sétál, akkor a következő nap eggyel többet tesz meg, ha pedig páros számú kilométert sétál, akkor a következő nap feleannyi kilométert tesz meg. Hány kilométert fog sétálni a 30. napon?

Megoldás: Nézzük meg az első néhány értéket. Az első napon 19 kilométert sétál, a második napon 20-at, a harmadik napon 10-et, a negyedik napon 5-öt, az ötödik napon 6-ot, a hatodik napon 3-at, a hetedik napon 4-et, a nyolcadik napon 2-t, a kilencedik napon 1-et. Viszont ezek után csak az 1 km és a 2 km fog ismétlődni, hiszen ha egy adott napon 1 kilométert sétál, akkor a rákövetkező napon kettőt fog, ha pedig 2 km-t sétál, akkor a rákövetkező napon 1 km-t fog. Ezt a két értéket ismételve azt kapjuk, hogy ha már túl vagyunk a nyolcadik napon, akkor Aslan minden páros sokadik napon 2 km-t sétál és minden páratlan sokadik napon 1 km-t, így a 30. napon 2 kilométert fog sétálni.

A2. Harry és a felsőbb évfolyamosok szabadidejükben Roxmortsba látogattak. A délután folyamán 57-en ittak vajsört és 34-en vettek Bogoly Berti mindenízű drazséből. Hányan vettek vajsört és mindenízű drazsét is, ha mind a 75-en vettek legalább az egyikből?

Megoldás: Tudjuk, hogy 57-en ittak vajsört és 34-en vettek Bogoly Berti mindenízű drazséből. Ha ezt a két értéket összeadjuk, akkor $57 + 34 = 91$ -et kapunk. De csak 75 diák látogatott Roxmortsba. Eszerint $91 - 75 = 16$ olyan diák van, akit kétszer számoltunk, mert mindenkit legalább egyszer számoltunk. Tehát 16-an vettek vajsört és mindenízű drazsét is.

A3. A Vörös Királynő és a Fehér Királynő dobókockákkal játszanak. Mindketten három kockával dobnak. A Vörös Királynő által dobott három szám szorzata 36, összege 11, a Fehér Királynő számainak szorzata 12, összege 8. Melyik szám szerepel mindkettőjük dobott számai közt?

Megoldás: A Vörös Királynő által dobott három szám szorzata 36. A kockákon csak 1-től 6-ig szerepelnek számok, így például 9-et nem tud dobni. A lehetséges dobások, amik 36 szorzatot adnak: 6, 6, 1, vagy 6, 3, 2, vagy 4, 3, 3. Ezek közül csak a $6 + 3 + 2$ esetén lesz 11 az összeg.

A Fehér Királynő által dobott három szám szorzata 12. A lehetséges dobások, amik 12 szorzatot adnak: 6, 2, 1, vagy 4, 3, 1, vagy 3, 2, 2. Ezek közül csak a $4 + 3 + 1$ esetén lesz 8 az összeg.

Tehát a Vörös Királynő a 6, 3, 2 számokat dobta, a Fehér Királynő pedig a 4, 3, 1-et. A 3 az a szám, ami szerepel mindkettőjük dobott számai között.

A4. Aprajafalván Törpapa a törpjeit sorokba állítja egy ünnepségre. Azt veszi észre, hogyha minden sorba pontosan 3 törp áll, akkor 2 törp marad ki, ha pedig soronként pontosan 4-en állnak, akkor 1 marad ki. Hány törp marad ki, ha hatosával állítja őket sorba?

Megoldás: Aprajafalváról 5 törp elutazott. Törpapa így is sorbaállítja az otthon maradt törpjeit. Amikor hármasával állítja őket sorokba, akkor senki sem marad ki, hiszen éppen egy sornyi (három), meg a két kimaradó törp utazott el. Amikor négyesével állnak az otthon maradt törpök a sorokban, akkor megint senki nem marad ki, hiszen éppen egy sornyi (négy törp), meg a kimaradó 1 törp utazott el. Tehát ekkor a törpök száma osztható hárommal és néggyel is, azaz osztható 12-vel. Így ha az otthon maradt törpöket hat fős sorokba osztja Törpapa, akkor senki sem marad ki. Tehát eredetileg, amikor 6 fős sorokba osztotta a törpöket, akkor 5 törp maradt ki (amennyi elutazott).

A megoldásban szereplő 5-ös szám légbőlkapottnak tűnhet. Egy lehetséges módszer az ilyen feladatok megoldására az, hogy végigmegyünk a 3-mal 2 maradékot adó számokon és leellenőrizzük a 4-es maradékaikat. Amikor megfelelőhöz érünk, akkor megkapunk egy számot, aminek a 3-as és a 4-es maradéka is megfelelő, így a 12-es (tehát 6-os) maradéka is. Vegyük észre, hogy kihasználtuk, hogy a 3 és a 4 relatív prím (vagyis hogy a legnagyobb közös osztójuk az 1).

A5. Egy hosszú autópálya mentén kilométerenként egy-egy számozott kilométerkő áll, az út elején nullás kővel kezdve. Egy fehér nyúl áll a 2026-os kilométerkő mellett. Egyszer csak a nyúl útnak indul, először egy kilométert ugrik csökkenő irányba, majd kettőt növekvőbe, és ezt folytatva felváltva ugrik a két irányba, mindig egy kilométerrel többet, mint előzőleg. A 2026 kilométer hosszú ugrása után megáll. Hányas kilométerkőnél áll ekkor?



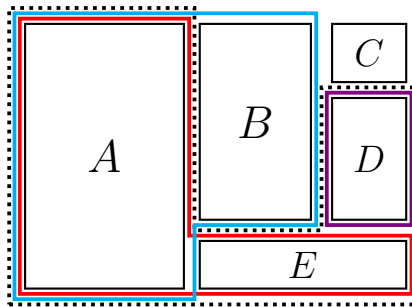
A
kategória

Tudjuk, hogy ezalatt a nyúl sosem éri el az autópálya egyik végét sem.

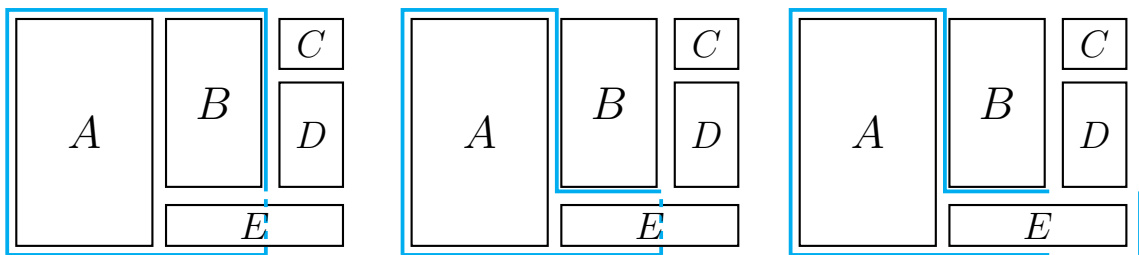
Megoldás: A nyúl először egy kilométert ugrik csökkenő irányba, majd kettőt növekvőbe, ekkor a 2027-es kilométerkőnél lesz. Ezután három kilométert ugrik csökkenő irányba, és négyet növekvőbe, ekkor 2028-as kilométerkőnél lesz. Megfigyelhetjük, hogy ha egy páratlan számot ugrik lefelé, és az ennél eggyel nagyobb páros számot felfelé, a két lépést összevonva ugyanaz történik, mintha csupán egy kilométert ugrott volna felfelé. A történetben az $1, 2, 3, \dots, 2026$ hosszú ugrásokat vizsgáltuk, kettesével összevonva ugyanazt kapjuk, mintha 1013 alkalommal ugrott volna 1 kilométert növekvő irányba. A 2026-os kőtől indult és $2026 + 1013 = 3039$, tehát a feladatbeli ugrások után a nyúl a 3039-es kilométerkőnél pihent meg.

A6. Az alábbi térkép mutatja négy jóbarát reggeli futását: Benedek a piros, Benjamin a lila, Bogi a kék, Brigi a pontozott utat futotta végig. Hány métert tett meg ma reggel Brigi, ha Benedek 1300 m-t, Benjamin 400 m-t, Bogi pedig 1200 m-t futott?

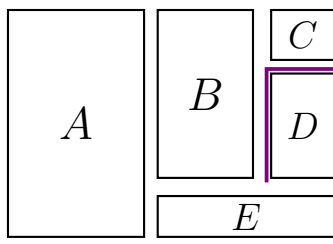
Benedek az A és E, Benjamin a D, Bogi az A és B, Brigi pedig az A, D és E épületek együttesét futotta körbe. Az utcák vastagsága nem számít.



Megoldás: Egy téglalap szemközti oldalai ugyanolyan hosszúak. Ezt felhasználva mozgassuk át Bogi futásának útvonalát az alábbi módon úgy, hogy a hossz ne változzon:



Ezek után Benjamin útvonalát is mozgassuk át.



Látszik, hogy Brigi útvonala ezen két átmozgatott útvonal összege, vagyis a megoldás $1200 + 400 = 1600$ m.



A
kategória

A7. Ábris sült krumplit eszik szósszal, összesen 120 szál krumplija van. Ha minden krumpliját egyszer mártaná bele a szószba, akkor megmaradna a szósz negyede. Hány szála nem maradna szósz, ha minden krumpliját kétszer mártaná bele a szószba?

Amíg van szósz, addig Ábris minden mártáskor ugyanannyi szószot rak egy sült krumplira.

Megoldás: A feladat szövege alapján egyszeri mártás esetén a krumplira a szósz $1 - 1/4 = 3/4$ része kerül fel. Így ahhoz, hogy kétszeri mártás esetén legyen elég szósz, ahhoz a szósz $2 \cdot 3/4 = 6/4 = 3/2$ részére lenne szükség. Tehát 120 sült krumpli kétszeri mártásához a szósz $3/2$ részére (másfélszeresére) lenne szükség, így mindössze a sült krumpli $2/3$ részét tudja bemártani kétszer Ábris, azaz $2/3 \cdot 120 = 80$ szálát. Tehát $120 - 80 = 40$ szála nem maradna szósz.

A8. Egy lottóhúzáson öt különböző számot húznak ki az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül. Eszter a lottóhúzás után az öt kihúzott szám közül az összes lehetséges módon összeadott két-két számot és az így kapott összegeket felírta magának. Ezek az összegek az 5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20 és a 24 voltak. Mennyi az öt kihúzott szám szorzata?

Megoldás: A legkisebb összeget Eszter biztosan úgy kapta, hogy a két legkisebb kihúzott számot adta össze. Mivel ez az összeg 5, ezért a két legkisebb kihúzott szám vagy az 1 és a 4 vagy a 2 és a 3 lehettek. A második legkisebb összeg biztosan a legkisebb szám és a harmadik legkisebb szám összege, hiszen az összes többi párosítás összege legalább ekkora lesz. Mivel ez az összeg a 8, ezért ha a legkisebb szám a 2, akkor a harmadik legkisebb a 6 lenne. Viszont ekkor a 2, 3 és a 6 is kihúzott számok, de nem szerepel a $3 + 6 = 9$ az összegek között, azaz ez az eset nem fordulhatott elő. Tehát a két legkisebb szám az 1 és a 4, így a harmadik legkisebb a 7 lesz a 8-as összeg miatt. A második legnagyobb összeg a legnagyobb és a harmadik legnagyobb kihúzott szám összegeként jön létre, azaz mivel a 7 a középső kihúzott szám és $20 = 7 + 13$, ezért ebből a legnagyobb szám a 13. A legnagyobb összeg a 24, így a második legnagyobb kihúzott száma $24 - 13 = 11$ lesz. A kihúzott számok: 1, 4, 7, 11, 13 és ezek szorzata 4004.

A9. Egy erdei tisztáson lovak, emberek és kentaurok állnak. Minden ember vagy a saját lova hátán érkezett vagy gyalog, és minden ló hátán pontosan egy ember jött. Tudjuk, hogy négyvel több kentaurok van, mint ló. Hány ember érkezett gyalog, ha összesen 110 lábat és 35 fejet számoltunk meg?

Egy kentaurnak 1 feje és 4 lába van.

Megoldás: Egy embernek egy feje és 2 lába, egy lónak 1 feje és 4 lába, egy kentaurnak szintén 1 feje és 4 lába van. Tehát az előbbi három élőlényből összesen 35 tartózkodik az erdei tisztáson. Ha mind emberek lennének, akkor 70 lábuk lenne. De 110 lábuk van, ez negyvennel több, ez alapján összesen 20 kentaurok és ló van ott. Továbbá tudjuk, hogy négyvel több kentaurok van, mint ló, emiatt a kentaurok száma 12, a lovak száma 8. Az emberek száma $35 - 20 = 15$. Ez alapján azt mondhatjuk, hogy $15 - 8 = 7$ ember érkezett gyalog.

A10. 1987. 06. 25. volt a legutóbbi olyan dátum, amely leírásához 8 különböző számjegyre volt szükség. Melyik évben lesz a legközelebbi ilyen dátum?

Megoldás: A hónapokat 01-től 12-ig tudjuk leírni, a napokat pedig 01-től 31-ig. Ebből következik, hogy a hónap leírásakor is, és a nap leírásakor is szerepel a 0, 1 és 2 számjegyek valamelyike. Tehát e három számjegy közül legalább kettőt nem használhatunk fel az évszámban. Minél korábbi dátumot keresünk, ezért maradjunk a 2-vel kezdődő éveknél. Ekkor a 0 és 1 számjegyet az évszámban már nem írhatjuk le, így hát a legkorábbi lehetőség az 2345-ös év. Megmutatjuk, hogy ez valóban megvalósítható: a 2345.06.17. a feladat feltételeinek megfelelő dátum.

A11. Dulifuli felír egy kétjegyű számot a táblára, ami nem osztható tízzel, és a két számjegye különböző. Ezek után Ügyifogyi felcseréli ennek a számnak a jegyeit, és a kapott kétjegyű számot felírja Dulifuli száma mellé a táblára. Végül Okoska összeadja a két számot. Ezek alapján hány különböző eredményt kaphat Okoska?



A
kategória

Megoldás: Legyen a Dulifuli által felírt kétjegyű szám $\overline{ab}$, azaz olyan szám, amiben az egyesek helyén b , a tízesek helyén pedig a áll. Ekkor a és b is 1-9-ig egy-egy számjegy, hiszen tudjuk, hogy a felírt szám kétjegyű és 10-zel nem osztható, továbbá $a \neq b$. Ekkor Ügyifogyi a $\overline{ba}$ számot írja a táblára. A Dulifuli által írt szám értéke helyiértékekkel számolva $10a + b$, míg Ügyifogyi számának értéke $10b + a$. Így ha Okoska összeadja ezt a két számot, akkor $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$ számot fogja kapni. Okoska száma tehát biztos osztható 11-gyel. De ekkor $a + b$ az eredetileg Dulifuli által felírt szám számjegyeinek összege, ez legalább $1 + 2 = 3$ és legfeljebb $8 + 9 = 17$, ezek között pedig bármilyen értéket felvehet. Azaz $a + b$ értéke egy egész szám 3-17-ig és az Okoska által kapott összeg ennek a 11-szerese. Ez 15 lehetőség, azaz Okoska 15-féle különböző eredményt kaphatott. A legkisebb eredmény a 33, a legnagyobb a 187, és könnyen látható, hogy minden köztes opcióra van példa.

A12. Hablaty az ábrán látható kilenc üres mezőbe egy-egy egész számot írt. Ezután észrevette, hogy minden sorban és oszlopban igaz az, hogy a szélső számokkal együtt öt különböző egymást követő szám szerepel valamilyen sorrendben. Mennyi a szürke mezőkbe írt számok szorzata?

	6	4	5	
5				7
3				1
4				3
	3	2	8	

Megoldás: A feladat feltételei alapján ha egy sorban, vagy egy oszlopban szerepel két szám, akkor bármely közöttük lévő egész szám is. Továbbá vegyük észre azt is, hogy minden sorban és oszlopban 4 az eltérés a benne szereplő legnagyobb és legkisebb szám között és semelyikben nem szerepelhet ugyanaz a szám kétszer.

Vizsgáljuk a jobb oldali oszlopot! Ebben a 7-es számjegy nem kerülhet a felső helyre, mivel ott már van egy 7-es, továbbá a középsőre sem, mivel akkor ott az 1 és a 7 között már 6 lenne az eltérés. Tehát a 7-es csak az alsó sorba kerülhet. Hasonlóan a 6-os sem kerülhet középre, mivel akkor ott 1-nek és a 6-nak már 5 lenne az eltérése, tehát a jobb felső sarokba 6-os kerül.

A jobb oldali oszlopban a hiányzó szám nem lehet a 9, mivel akkor a középső sorban az 1 és a 9 között már 8 lenne az eltérés, így oda csak 4 kerülhet.

Vegyük észre, hogy az alsó sorban már szerepel 3-as és 7-es, tehát ott a számok 3-tól 7-ig szerepelnek, amiből már csak az 5-öt és a 6-ot nem írtuk be. Mivel a bal oldali oszlopban már van 6-os, így csak az 5-ös kerülhet a bal alsó sarokba, tehát az alsó sor középső helyére jön a 6-os.

Az előbbi észrevételhez hasonlóan a középső oszlopban 2-től 6-ig kellenek, hogy legyenek a számok, amiből már csak a 3 és az 5 hiányzik. Mivel a felső sorban már van 5-ös, így a középső oszlop felső mezejébe 3-as kerül, középre pedig az 5-ös.

A középső sorban ekkor könnyen látható, hogy csak akkor kapunk egymást követő számokat, ha a jobb oldali mezejébe 2-est írunk. Végül pedig a bal oszlopot tekintve láthatjuk azt, hogy csak akkor kapunk ott egymást követő számokat, ha a bal felső sarokba 4-es kerül.

Tehát a szürke mezőkbe két 5-ös és egy 6-os kerül, melyek szorzata $5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$.

A13. Egy négyzetrácsos lapon összekötöttünk néhány rácspontot és oldalfelező pontot, így az ábrán látható gyémánt alakot kaptuk. Hány cm^2 a késsel színezett részek területeinek összege, ha az egész gyémánt területe 198 cm^2 ?

	6	4	5	
5				7
3				1
4				3
	3	2	8	

	6	4	5	
5				7
3				1
4				3
	3	2	8	

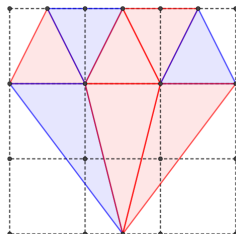
	6	4	5	
5	4	3		7
3	2	5	4	1
4	5	6	7	3
	3	2	8	



Döntő (2026. január 16-17.)

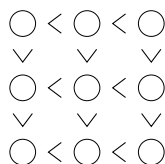
Váltó Megoldókulcs

A
kategória



Megoldás: Legyen egy-egy kis négyzet oldala 1 egység hosszúságú. Ekkor a kis háromszögek területe 0,5 területegység, hiszen átdarabolható egy $0,5 \times 1$ -es téglalappá. Az öt kis háromszög így összesen 2,5 területegység. Az alsó háromszögek együtt egy nagyobb háromszöget alkotnak, aminek területe 3, hiszen átdarabolható egy $1,5 \times 2$ -es téglalappá. A három alsó háromszög közül a középső területe 1 területegység, hiszen átdarabolható egy $0,5 \times 2$ -es téglalappá, a másik kettő pedig egyenlő, hiszen az ábra szimmetriája miatt egybevágók. Így ennek a két háromszögnek a területe $\frac{3-1}{2} = 1$ területegység. Ezek alapján a kékkel színezett terület 2 területegység, az egész alak területe pedig 5,5 területegység. A kék háromszögek területe az egész alakzat területének $\frac{2}{5,5} = \frac{4}{11}$ része, ami $198 \cdot \frac{4}{11} = 72\text{cm}^2$.

A14. Ki szeretnének tölteni az alábbi ábrát 1-től 9-ig a számjegyekkel úgy, hogy minden szám pontosan egyszer szerepeljen, valamint hogy az 5-ös számjegy ne középre kerüljön. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a bejelölt relációs jelek ($<$ és $>$) helyes irányba álljanak?

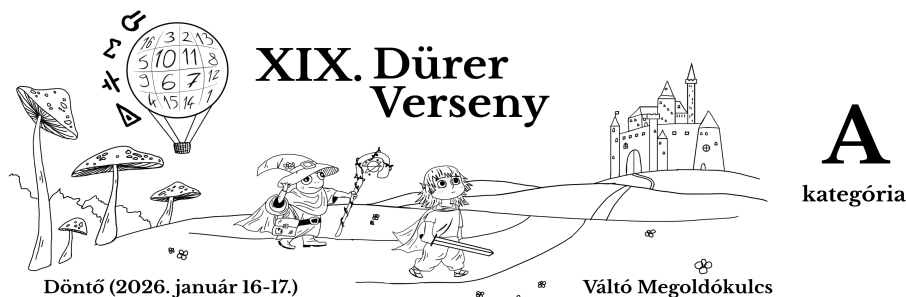


Megoldás: Látszik, hogy a jobb felső sarokban lévő számnak nagyobbak kell lennie minden másnál, ezért ide csak a 9-es kerülhet. Hasonlóan a bal alsó sarokba csak 1-es kerülhet. Az 5-ös nem kerülhet a felső sor középre, mert van öt darab mező, ahova kisebb számnak kell kerülnie, mint oda. Hasonlóan az 5-ös nem kerülhet jobb középre, alul középre és bal középre sem. Nézzük meg, hányféleképpen lehet kitölteni, ha bal felülre kerül.

Nézzük meg, milyen szám kerül középre. Ennél nagyobb a felül középső, valamint a jobb középső is, ezért ide legfeljebb 6-os kerülhet. Hasonlóan belátható, hogy legalább 4-esnek kell ide kerülnie. Nézzük azt az esetet, amikor 6-os kerül ide. Ekkor a felül középső, valamint a jobb középső mezőkbe kell kerülnie a 7, 8-nak, de ezek mindig felcserélhetőek lesznek. Ekkor nézzük, hova kerülhet a 4-es. Bal középre kerülhet, ekkor a maradék helyeket egyféleképpen lehet kitölteni. Ha jobb alulra kerül, akkor a 2-es, 3-as számokat szabadon be tudjuk írni a bal középső, illetve alul középső helyekre. Ez összesen $3 \cdot 2$ lehetőség. Ha pedig 4-es kerül középre, hasonlóan kapunk 6 kitöltést. Szimmetria miatt ugyanennyi, 12 kitöltés van, ha az 5-ös jobb alulra kerül. Vagyis összesen 24 jó kitöltés van.

A15. Az intergalaktikus birodalom XIX. bolygóján egy év 30 hónapból áll. A hónapok közül kettő 17 napos, öt 18 napos, tizenkilenc 19 napos, kettő 20 napos, kettő pedig 21 napos, de azt nem tudjuk, hogy ezek milyen sorrendben követik egymást. Az idei év a XIX. bolygón hétfővel kezdődött. Ezek alapján legfeljebb hány hónap kezdődhet hétfővel ebben az évben?

A bolygón a hetek, a Földhöz hasonlóan 7 napból állnak.



Megoldás: Próbáljuk meg a hónapokat úgy csoportokba osztani, hogy minden csoportban a napok összege osztható legyen 7-tel. Ekkor ha ez a csoport hétfővel kezdődik, akkor a csoport utáni első nap is hétfő lesz. Ha a csoportjaink 2 db $\{21\}$, 2 db $\{17, 19, 20\}$, 5 db $\{18, 19, 19\}$ és az utolsó csoport a maradék 7 db 19 napos hónap, akkor minden csoportban a napok száma osztható 7-tel, és mivel az első csoport hétfővel kezdődik, ezért mind a 10 csoport hétfővel kezdődik. Egy csoport kezdete persze egy hónap kezdete is, tehát lesz 10 olyan hónap, ami hétfővel kezdődik.

Még be kell látnunk, hogy 10-nél több hónap nem kezdődhet hétfővel. Ehhez nézzük meg, hogy melyik hónaphoz hány nap hiányzik ahhoz, hogy egész számú hét legyen (azaz a napok száma osztható legyen 7-tel). Ez 17 nap esetén 4, 18 nap esetén 3, 19 nap esetén 2, 20 nap esetén 1, 21 nap esetén pedig 0. Ha ezeket összeadjuk az összes hónapra, akkor összesen 63 napnyi hiányt kapunk, amit el kell osztanunk úgy a csoportok közt, hogy minden csoportban 7-tel osztható számú nap hiányozzon összesen (különben nem lehet 7-tel osztható a csoportban a napok száma). Elég azt az esetet néznünk, amikor a két 21 napos hónap egy-egy csoportot alkot önmagában, hiszen ha egy legalább két hónapos csoportban benne van egy 21 napos hónap, akkor azt kivéve a maradék is 7-tel osztható, és a 21 napos hónap önmagában is, tehát eggyel több csoport kezdődik hétfővel.

Így tehát feltehető, hogy az első két hónap 21 napos (hiszen a csoportok sorrendje nem számít), és elég azt néznünk, hogy a maradék 28 hónapból hány megfelelő csoportot tudunk csinálni. Ahhoz, hogy legalább 11 kezdődjön hétfővel, legalább 9 csoportba kell osztanunk a hónapokat. Ekkor a 63 nap hiányt csak úgy lehet 9 csoportba osztani, hogy minden csoportba 7 nap hiány kerül. Ez nem lehetséges, mert ha néhány szám összege 7, akkor muszáj köztük legalább egy páratlannak lennie, de csak a 3 és az 1 nap hiányú hónapokban páratlan a hiányzó napok száma, az ilyen hónapokból pedig összesen csak 7 van. Így tehát nem kezdődhet 10-nél több hónap hétfővel.

A16. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek a számjegyeinek összege 11, de nem szerepel benne a 0-s számjegy?

Megoldás: Vegyünk egy 1×11 -es téglalapot. Ezen fogunk ábrázolni egy-egy ilyen számot az alábbi módon. Néhány függőleges vonallal kisebb, egész oldalhosszúságú téglalapokra daraboljuk úgy, hogy ha a szám első jegye x , akkor balról az első téglalap x széles lesz. Ha a második jegy y , akkor a második téglalap y széles lesz és így tovább. Látszik, hogy minden egyes olyan számhoz, amiben a jegyek összege 11 és nincs benne 0, ahhoz létezik ilyen felbontás, valamint két különböző ilyen számhoz különböző téglalapfelbontás tartozik. Sőt visszafelé, minden téglalapfelbontáshoz is tartozik egy-egy ilyen szám, ha nincs olyan téglalap, aminek a szélessége nagyobb, mint 9.

Az összes téglalapfelbontás száma 1024, mert minden, a függőleges oldaltól egész távolságra lévő függőleges vonalnál egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy behúzzuk-e, vagy sem. Ez minden esetben két lehetőség, és 10 darab ilyen döntés van, tehát ez $2^{10} = 1024$ opció. Ebből viszont ki kell vonni azokat az eseteket, amikor van olyan téglalap, aminek a szélessége nagyobb, mint 9. Ha van egy 10 hosszú téglalap, akkor amellet csak 1 darab 1 széles lehet, vagy tőle jobbra, vagy tőle balra, ez két eset. Ha van 11 hosszú téglalap, akkor az kitölti az egész téglalapot. Vagyis a megoldás $1024 - 3 = 1021$.



B
kategória

- B1.** Lásd az A kategória 3. váltófeladatát.
- B2.** Lásd az A kategória 4. váltófeladatát.
- B3.** Lásd az A kategória 5. váltófeladatát.
- B4.** Lásd az A kategória 6. váltófeladatát.
- B5.** Lásd az A kategória 7. váltófeladatát.
- B6.** Lásd az A kategória 8. váltófeladatát.
- B7.** Lásd az A kategória 10. váltófeladatát.
- B8.** Lásd az A kategória 11. váltófeladatát.
- B9.** Lásd az A kategória 12. váltófeladatát.
- B10.** Lásd az A kategória 13. váltófeladatát.

B11. Merlin 9 sárkánytojást talált, amiknek a színe piros, zöld vagy fekete, míg az alakja gömb, kocka vagy gyűrű. Minden színből és alakból is 3-3 tojás van, és minden tojás csak egyféle színű és alakú lehet. Azt is észrevette, hogy nincs két tojás, amiknek a színe és az alakja is ugyanolyan. Merlinnek a kiköltéshez úgy kell elhelyeznie a tojásokat egy 3×3 rekeszes dobozba, hogy megfeleljen az ábrának. Hányféleképpen helyezheti el így a tojásokat?

P	Z	
	P	Z
F		F

Megoldás: A feladat feltételeinek akkor felel meg egy kitöltés, ha minden színből három különböző alakú tojás van. Kettő pirosnak a helyét látjuk az ábrán, a harmadik piros tojás csak az egyelőre színtelen gömb és gyűrű lehet, mert piros kocka tojás már van.

1. eset: Ha a gömb piros, akkor a középen lévő piros tojás csak gyűrű lehet. A zöldekből is kettő helye adott, a harmadik a színtelen gyűrű és kocka valamelyike lesz. Ha a gyűrű lesz zöld, akkor a harmadik zöld alakja csak kocka lehet, és a három legalsó sorban lévő tojás mind fekete. Mivel a középső kocka alakú, a másik kettő gömb vagy gyűrű és mindkettő lehetséges a feladat feltételei szerint, ez **2 lehetőség**.

Ha a kocka lesz zöld, akkor a harmadik zöld alakja gyűrű, a jobb felső sarokban lévő gyűrű csak fekete lehet, az alsó két fekete tojás alakja gömb és kocka valamilyen sorrendben, ez is **2 lehetőség**.

2. eset: Ha a harmadik piros a jobb felső sarokban lévő gyűrű lesz, akkor a középső piros gömb alakú. A harmadik zöld ekkor csak a színtelen kocka lehet, mert zöld, gömb alakú tojás már van. A felső sorbeli zöld tojás gyűrű lesz, a kimaradt, az ábrán színtelen gömb tojás pedig fekete, ezért ismét az alsó két fekete alakja ad újabb **2 lehetőséget**.

Minden esetet megvizsgáltunk, és összesen 6-féleképpen helyezheti el Merlin a tojásokat.

- B12.** Lásd az A kategória 14. váltófeladatát.
- B13.** Lásd az A kategória 15. váltófeladatát.

B14. Gandalf felrajzolt a porba két 125 cm oldalhosszúságú négyzetet, melyeknek az egyik csúcsa közös. A négyzetek csúcsait elnevezte az ábra szerint. Tudjuk, hogy az A_1 és A_2 csúcsok távolsága 234 cm, valamint a B_1 és B_2 csúcsok távolsága 322 cm. Hány centiméter a C_1 és C_2 csúcsok távolsága?

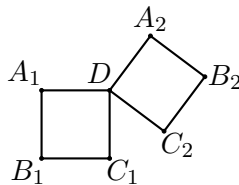


Döntő (2026. január 16-17.)

Váltó Megoldókulcs

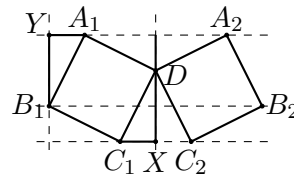
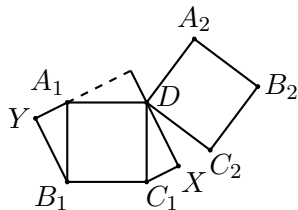
B

kategória



Megoldás: Vegyük észre, hogy az ábra szimmetrikus C_1DC_2 szögfelezőjére. Ez azért van, mert az A_1DA_2 , B_1DB_2 és C_1DC_2 háromszögek egyenlőszárúak, amelyekben mindben D az alappal szemben fekvő csúcs.

Legyen f a C_1DC_2 szögfelezője. Legyen X a C_1 pont merőleges vetülete f -re. Legyen továbbá Y a B_1 -en átmenő, f -fel párhuzamos egyenes, valamint az A_1 -en átmenő, f -re merőleges egyenes metszéspontja. Ekkor a DC_1X , valamint a B_1A_1Y háromszögek egybevágóak, hiszen $DC_1 \parallel B_1A_1$, $C_1X \parallel A_1Y$ és $XD \parallel YB_1$, valamint $A_1B_1 = C_1D$. Tehát $C_1X = A_1Y$. Vegyük észre, hogy C_1X a megoldás fele. Továbbá vegyük észre, hogy az ábra szimmetriája miatt (pontosabban a $B_1B_2A_2A_1$ trapéz szimmetrikussága miatt) $A_1Y = \frac{B_1B_2 - A_1A_2}{2}$. Vagyis a megoldás $322 - 234 = 88$.



B15. Lásd az A kategória 16. váltófeladatát.

B16. Alice szeretne vásárolni a Bolond Kalapostól. Alice-nél és a Bolond Kalaposnál is 5-5 darab pozitív egész és nem feltétlen különböző címletű pénzérme van. A vásárlás során Alice odaad néhány pénzérmét a Kalaposnak, aki visszaad a sajátjai közül néhány (akár 0 darab) pénzérmét. Azt veszik észre, hogy így Alice bármely egész értéket pontosan ki tud fizetni 1-től n -ig. Mi lehet n legnagyobb értéke?

Ha az Alice-nél lévő pénzérmék értéke 1, 11, 42, 69 és 100, a Kalaposnál pedig 1, 1, 1, 1 és 7, akkor az 1, 2 = 11 - 7 - 1 - 1, 3 = 11 - 7 - 1, 4 = 11 - 7, 5 = 11 + 1 - 7 összegek kifizethetők, de a 6-ot már nem tudná kifizetni.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy n lehető legnagyobb értéke $(32 - 1) \cdot 32 = 992$.

A konstrukcióhoz megadunk megfelelő érmeértékeket. A konstrukcióban legyen Kalaposnál az első öt 2-hatvány, míg Alice-nél az azt követő öt 2-hatvány. Tehát precízebben Kalaposnál legyen 1, 2, 4, 8, 16, míg Alice-nél 32, 64, 128, 256, 512. Vegyük észre, hogy az Alice-nél lévő számok éppen a 32-szeresei a Kalaposnál lévő számoknak. A számok 2-es számrendszerbeli alakjából tudjuk, hogy bármely pozitív egész $\ell \leq 31$ -re ℓ előáll csupán Kalapos néhány számának összegeként. Hasonlóan tehát bármely pozitív egész $k \leq 31$ -re $32 \cdot k$ előáll csupán Alice néhány számának összegeként. Ekkor viszont tetszőleges $k \leq 31$ pozitív egészre és $\ell \leq 31$ nemnegatív egészre kifizethető $32 \cdot k - \ell$, amik épp előállítják a nemnegatív egészeket $31 \cdot 32$ -ig.

Az indokláshoz belátjuk, hogy ennél nagyobb n -ekre a feladat nem teljesíthető. Nézzük meg, hogy hányféle érme kombinációt tud adni Alice Kalaposnak. Bármelyik érméről egymástól függetlenül eldöntheti, hogy odaadja-e Kalaposnak vagy sem, ez $2^5 = 32$ opció. Viszont az nem megengedett, hogy egy érmét sem ad át, tehát összesen csak 31-féle opciója van. Viszont Kalaposnak hasonlóan 32 opciója van arra, hogy kiválassza milyen érmeiket ad vissza. Ha az ilyen oda- és visszaadások mind különböző értékeket adnak, akkor az legfeljebb $31 \cdot 32 = 992$ opciót ad, amivel kész lettünk.

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - A kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																Pont	
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.		Σ
1.	Lapazarlók	Bajkó Péter Gertner Milán Kóbor Júlia Ilona	6. 6. 5.	Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium; Dunakeszi	Paróczay Eszter, Sityer Beáta	12	12	12	11	12	12	71	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	0	66	137
2.	TIGrisek	Csaba András Harangi János Winkler-Antal Vanda	5. 6. 6.	Gödöllői Török Ignác Gimnázium; Gödöllő	Tóthné Kovács Judit, Veszelyné Fábri Zsuzsanna	12	12	7	3	6	12	52	3	3	3	3	4	4	3	4	5	5	3	5	6	5	0		56	108
3.	Köbűki	Séra Laura Molnár Bálint Földi Míra	5. 6. 5.	Szent György Görögkatolikus Óvoda és Általános Iskola; Kisvárdá	Jenei Miklós, Szerafin Tünde	12	10	2	8	5	12	49	3	3	3	3	4	4	2	4	4	3	0	5	6				44	93
4.	Premi1234	Személyi Veronika Czike Léla Erzsébet Garai Benedek	6. 6. 5.	Premontrei Szent Norbert Gimnázium, Egyházzenei Szakgimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Kollégium; Gödöllő	Debnárné Vajóczki Krisztina, Pál Zsófia	8	4	8	7	7	12	46	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	4	5	0				46	92
5.	Meghatározhatatlanok	Szabó Kinga Nagy Antal Szentgyörgyi Levente	5. 6. 6.	Hatvani Kossuth Lajos Általános Iskola; Hatvan	Kádár Emese, Lipták Adrienn	12	8	7	7	4	3	41	2	3	3	3	4	4	0	4	5	4	0	5	6	0	0		43	84
6.	MatematIQ-sok	Budai Boglárka Kassa Marcell Bence Fehérvári Kristóf	5. 6. 6.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Petrohán Krisztina	0	12	1	9	3	6	31	3	3	3	3	4	4	4	3	5	5	5	5	5	0			52	83
7.	PVG08	Simon Luca Domán Balázs	5. 6.	Egri Pásztortölggyi Általános Iskola és Gimnázium; Eger	Bóta Mariann	12	12	2	7	5	3	41	3	3	3	3	4	4	4	2	0	3	0	5	0	0	0		34	75
8.	Görények a Marsról	Illés Tamás Gellért Bütösi Borbála Molnár Ákos Csaba	6. 5. 6.	Premontrei Szent Norbert Gimnázium, Egyházzenei Szakgimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Kollégium; Gödöllő	Debnárné Vajóczki Krisztina, Kömüves Márton	8	6	7	5	3	3	32	3	3	3	3	0	4	3	0	4	5	5	5					38	70
9.	Kuflik	Uri Bence Domján Barnabás Arnóczki Dóra	6. 6. 5.	Jókai Mór Református Általános Iskola és Óvoda; Nyíregyháza	Farkas-Veres Tünde, Szabó Katalin, Safranku András	7	8	1	8	6	0	30	3	3	3	3	0	0	4	4	5	0	0	5	6	0	0		36	66
10.	Köbükik	Laufer Lotti Jakab-Réti Nimród Tózsá Botond	5. 6. 6.	Egri Hunyadi Mátyás Általános Iskola; Eger	Vasné Dévai Zsuzsana	12	2	-	7	2	12	35	3	3	2	3	4	0	3	0	5	5	0	0	0	0	0	0	28	63
11.	Kovászos uborka	Csiffáry Zsombor Gergely M. Kiss Tamás Tajti Eszter	6. 6. 5.	Eszterházy Károly Katolikus Egyetem Gyakorló Általános Iskola, Gimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Technikum; Eger	Szűcs István, Majoros Csilla	0	6	6	8	4	0	24	2	3	3	2	4	4	0	4	4	5	4	0	0	0	0	0	35	59
12.	BTH	Szabó Blanka Komáromi Johanna Bartók Hunor	6. 6. 5.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Pilzné Nagylaki Tünde, Szalóki Rita	2	2	1	7	4	12	28	3	3	3	3	0	0	0	0	5	5	0	5	0	0	0	0	27	55
12.	Fantastic3	Kallós Bertalan Kallós András Varga Karolina	5. 6. 5.	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Két Tanítási Nyelvű Általános Iskola, Kollégium, Óvoda és Alapfokú Művészeti Iskola; Nyíregyháza	Treszkai László	0	6	2	7	1	6	22	3	3	3	3	4	0	4	4	4	5	0	0					33	55
14.	SZERETJÜK	Konkoly-Molnár Botond Sándor Vencel Farkas Lara	6. 5. 6.	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, Kollégium és Óvoda; Miskolc	Németh Anna	8	6	0	7	5	0	26	3	3	3	3	3	3	4	0	0	5	0	0					27	53

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - A kategória

						Kifejtős forduló								Váltóforduló																		Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ			
15.	Magyarosok	Sózer-Pápai Péter Sózer-Pápai Jázmin Pásztor Csenge Dóra	5. 6. 6.	Szent György Görögkatolikus Óvoda és Általános Iskola; Kisvárd	Jenei Miklós, Szerafin Tünde	-	6	2	7	3	3	21	3	3	3	3	3	3	2	0	0	4	0	5	0	0			29	50		
16.	PETRÁPATRI	Kis Petra Bercsenyi Ábel Levente Sebestyén Patrik	5. 5. 6.	Hatvani Kossuth Lajos Általános Iskola; Hatvan	Kádár Emese, Lipták Adrienn	8	-	6	7	3	0	24	3	3	3	2	0	4	0	0	0	5	0	5	0	0			25	49		
17.	Matenergy	Korsós Gábor László Hammer Sebestyén Pál Balla Nikolett	5. 6. 6.	Hatvani Kodály Zoltán Értékközvetítő és Képességefejlesztő Általános Iskola; Hatvan	Samuné Tóth Szilvia	10	4	1	3	6	0	24	3	3	3	3	0	0	0	0	4	5	0	0	0			21	45			
18.	Burgonya	Takács Patrik Csaba Labbanicz Marcell Kónya Lara	6. 6. 5.	Szent György Görögkatolikus Általános Iskola; Kazincbarcika	Fónagyné Pál Zsuzsanna	10	4	4	4	2	0	24	3	3	2	0	4	0	3	0	0	5	0	0	0	0	0	0	20	44		
18.	Fantasztikus hármas	Zsiros Emili Mira Baranyi Dávid Tóth-Szanyi Natália	5. 6. 6.	Hatvani Kodály Zoltán Értékközvetítő és Képességefejlesztő Általános Iskola; Hatvan	Samuné Tóth Szilvia	10	4	1	3	4	0	22	3	2	3	1	0	0	3	0	0	4	0	0	0	0	6	0	22	44		
20.	Akimeraznyer	Bóka László Bozsik Sára Kaló Dávid	5. 6. 6.	Gárdonyi Géza Ciszterci Gimnázium és Kollégium; Eger	Pozsikné Rauf Bettina	8	4	0	6	5	0	23	3	3	3	3	0	0	0	4	0	3	0	0				19	42			
20.	Logiquosok	Glück Marcel Szabó Boglárka Sipos Petra	5. 6. 6.	Eszterházy Károly Katolikus Egyetem Gyakorló Általános Iskola, Gimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Technikum; Eger	Garbaczné Olasz Andrea, Tóthné Szűk Erzsébet	10	6	2	2	3	0	23	3	3	3	3	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0		19	42			
22.	Fantastic7	Orosz Franciska Tóth Júlia Verebélyi Patrik	6. 6. 5.	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Két Tanítási Nyelvű Általános Iskola, Kollégium, Óvoda és Alapfokú Művészeti Iskola; Nyíregyháza	Treszkai László	8	0	-	7	3	0	18	2	3	2	3	4	0	0	0	0	4	0	3	0	0		21	39			
23.	FFGalfa	Zsigmondi Írisz Miskolci Marcell Fésűs Kristóf	6. 5. 5.	Miskolci Szabó Lőrinc Általános Iskola; Miskolc Miskolci Egyetem Földes Ferenc Gyakorló Gimnázium; Miskolc Miskolci Egyetem Földes Ferenc Gyakorló Gimnázium; Miskolc	Grallert Krisztina, Kovács Beáta, Hódi Piroska	8	2	2	7	3	3	25	3	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0				7	32				
24.	Matudósok	Balla Anna Tegda Botond Hauser Marcell	5. 6. 6.	Sárospataki II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola; Sárospatak	Leiterné Csete Andrea, Géczy Tamásné	2	2	1	4	2	0	11	3	3	0	2	0	4	0	0	0	0	0	0			12	23				
25.	Los Matekos	Nagy Levente Vizin Máté Nagy Bíborka	6. 6. 5.	Gárdonyi Géza Ciszterci Gimnázium és Kollégium; Eger	Zay Noémi, Verébné Soós Györgyi	0	0	2	6	4	0	12	2	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0				7	19				
26.	Szilvaleki	Szombati László Bajuszsnács Olivér Helenkár Lili	6. 6. 5.	Kecskeméti Református Általános Iskola; Kecskemét	Gyömbér Csaba, Vigh Norbertné	nem jelentek meg						0	nem jelentek meg																0			
26.	Számvetők	Törőcsik Tamás Horváth Bíborka Urbán Hanna	5. 6. 6.	Bocskai István Katolikus Gimnázium, Technikum, Általános Iskola és Óvoda Bolyai János Tagiskolája; Szerencs	Jászayné Deák Erzsébet Katalin, Csikai Zoltán, Csákiné Borbély Mónika	nem jelentek meg						0	nem jelentek meg																0			

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - B kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																	Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	Agymenők	Katona Amina Tajti Márton Sági Szabolcs	7. 8. 8.	Eszterházy Károly Katolikus Egyetem Gyakorló Általános Iskola, Gimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Technikum; Eger	Garbaczné Olasz Andrea, Tóthné Szűk Erzsébet	12	12	10	10	6	12	62	3	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	0	0	0	0	47	109
2.	Fűszeres fasírt	Koncz Olivér Bene Balázs Fejes Eszter	8. 8. 7.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Takács Zoltán, Kóródi Zoltán	12	12	8	7	8	12	59	3	3	3	3	4	4	4	3	5	5	4	5					46	105
3.	Mind1 TIG	Barabás Ákos Keszthelyi Kolos Winkler-Antal Dalma	8. 7. 8.	Gödöllői Török Ignác Gimnázium; Gödöllő	Puskásné Budai Tünde	12	8	11	12	7	0	50	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	0			53	103
3.	Pi-ráják	Lengyel András Király Bálint Kallós Klára	7. 8. 8.	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Két Tanítási Nyelvű Általános Iskola, Kollégium, Óvoda és Alapfokú Művészeti Iskola; Nyíregyháza	Királyné Varga Krisztina, Nagy Róbert	12	12	9	10	1	12	56	3	3	3	3	3	4	4	0	5	5	5	4	5				47	103
5.	Hát nem tudom	Molnár Dávid Horváth Ákos Szakonyi Zsuzsanna	8. 8. 7.	Petőfi Sándor Katolikus Általános Iskola és Óvoda; Kecskemét	Nagy Tibor	12	12	11	7	-	12	54	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	0	0			48	102
5.	Pisták(talán?!)	Gábor Dorottya Szárász Vince Tóth János	8. 7. 7.	Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium; Dunakeszi	Paróczay Eszter, Bánhegyesiné Topor Gizella	12	6	12	6	7	12	55	3	3	3	3	4	4	4	3	5	5	5	5	0				47	102
7.	DÖRMI MACIK	Kis Emma Kajdi Kata Nagy-Varga Mátyás	8. 8. 7.	Hatvani Bajza József Gimnázium; Hatvan	Székelyné Kiszler Erika	12	7	10	9	5	12	55	3	3	3	3	4	4	4	2	5	5	0	5	0				41	96
8.	Hol? A Düreren?	Babai Hédi Kovács Áron Szekeres Luca	8. 8. 7.	Petőfi Sándor Katolikus Általános Iskola és Óvoda; Kecskemét	Nagy Tibor	12	7	8	6	0	6	39	3	3	1	3	4	4	4	3	5	5	5	4	0				44	83
8.	Primosztók	Harangozó Máté Juhász Levente Péter Lilien	8. 8. 7.	Egri Dobó István Gimnázium; Eger	Dr. Pappné Balázs Judit	10	7	10	6	6	6	45	3	3	3	1	3	4	4	4	5	5	0	3	0	0			38	83
10.	GÁT	Molnár Tünde Lupkovics Gergő Soltész Ágnes	8. 8. 7.	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, Kollégium és Óvoda; Miskolc	Svidróné Grallert Marianna	12	12	7	1	5	12	49	3	3	3	2	4	4	4	0	5	4	0	0					32	81
11.	Goose	Morvai Míra Fanni Homa Kristóf Borcsik Bálint	8. 7. 7.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Takács Zoltán, Kóródi Zoltán	8	7	7	7	4	0	33	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	3	0				46	79
12.	Háromegésztizennégy	Bakonyi Júlia Li Chunru Sallai Antal Botond	7. 7. 7.	ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium; Budapest	Csiginé Varga Klaudia	6	1	8	6	7	6	34	3	3	3	2	4	4	4	4	5	5	4	0	0				41	75
12.	Nem oszt nem szoroz	Turcsányi Panni Lili Győrvári Dániel M. Kiss Márton	7. 8. 8.	Eszterházy Károly Katolikus Egyetem Gyakorló Általános Iskola, Gimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Technikum; Eger	Tóthné Szűk Erzsébet, Garbaczné Olasz Andrea	4	8	8	6	4	12	42	3	3	3	3	3	4	4	0	5	5	0	0	0	0			33	75

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - B kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																	Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
14.	TACO FALÓK	Kovács Nóra Szabó Ágnes Róza	8. 8.	Hatvani Kossuth Lajos Általános Iskola; Hatvan	Kádár Emese	12	12	7	6	2	0	39	3	3	0	1	3	4	4	2	5	5	4	0	0	0	0		34	73
15.	Logikusokk	Pósz Zoltán Puskás Levente Varga Miriam Anna	8. 8. 7.	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Két Tanítási Nyelvű Általános Iskola, Kollégium, Óvoda és Alapfokú Művészeti Iskola; Nyíregyháza	Királyné Varga Krisztina, Virágné Román Zsuzsanna	10	7	11	7	-	0	35	3	3	2	3	4	4	4	0	5	5	3	0	0	0	0	0	36	71
16.	Radírok	Zsóka Hanna Zsuga Zara Ildikó Fehér Balázs	7. 8. 8.	Hernádnémeti Református Általános Iskola, Két Tanítási Nyelvű és Alapfokú Művészeti Iskola; Hernádnémeti	Badics Ágnes, Major- Nagy Barbara	8	2	7	5	3	12	37	3	2	2	0	4	4	4	0	5	5	0	0	0				29	66
17.	Dino	Vadász Fanni Joó Gergő Papp Júlia Lilla	8. 8. 7.	Szent László Katolikus Gimnázium, Technikum, Két Tanítási Nyelvű Általános Iskola, Kollégium, Óvoda és Bölcsőde; Kisvárd	Jeneiné Biervarth Andrea, Kovácsné Szopkó Anna	10	3	5	5	3	0	26	2	3	0	3	2	4	4	4	5	5	5	0					37	63
18.	#KapufaKisfiam	Tamás Anna Varga Bálint Varga Fanni	8. 7. 8.	Miskolci Egyetem Földes Ferenc Gyakorló Gimnázium; Miskolc	Csendi Balázs, Dr. Győry Ákos, Grallert Krisztina	4	6	10	3	0	3	26	3	3	3	0	2	4	4	4	5	0	0	0					28	54
18.	???	Bodnár Csenge Csintalan Kitti Rimavölgyi Dániel	8. 8. 7.	Szent György Görögkatolikus Általános Iskola; Kazincbarcika	Fónagyné Pál Zsuzsanna	4	5	6	5	2	0	22	3	2	3	0	4	4	4	4	0	0	0	3	5				32	54
18.	idk	Szabó Katalin Trám Noémi Zbogár Zente	8. 8. 7.	Miskolci Egyetem Földes Ferenc Gyakorló Gimnázium; Miskolc	Grallert Krisztina	5	-	9	5	7	0	26	3	3	3	2	0	3	4	0	5	5	0						28	54
21.	Parti Márk	Parti Márk Tóth Zoltán Brogli Dorka	8. 8. 7.	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, Kollégium és Óvoda; Miskolc	Svidróné Grallert Marianna	8	6	3	5	2	3	27	2	2	2	3	4	4	3	0	5	0	0	0	0	0	0		25	52
22.	Krampuszok	Bagi Barna Andrási Boglárka Tóth Ivett	8. 7. 8.	Egri Hunyadi Mátyás Általános Iskola; Eger	Vasné Dévai Zsuzsanna	8	0	7	5	6	0	26	3	3	3	3	0	0	4	0	0	5	0						21	47
23.	Kakaó	Nagy Tekla Ella Nagy Eliza Fédra Kovács Zétény	7. 8. 8.	Sárospataki II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola; Sárospatak	Géczi Tamásné	2	7	7	4	0	0	20	3	0	2	2	0	0	4	0	4	5	0	0					20	40
24.	Bundáskenyér	Poroszká Balázs Braun Dávid Vigh Norina	7. 7. 7.	Sárospataki II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola; Sárospatak	Géczi Tamásné	6	7	3	2	-	0	18	2	3	2	2	3	4	4	0	0	0	0						20	38