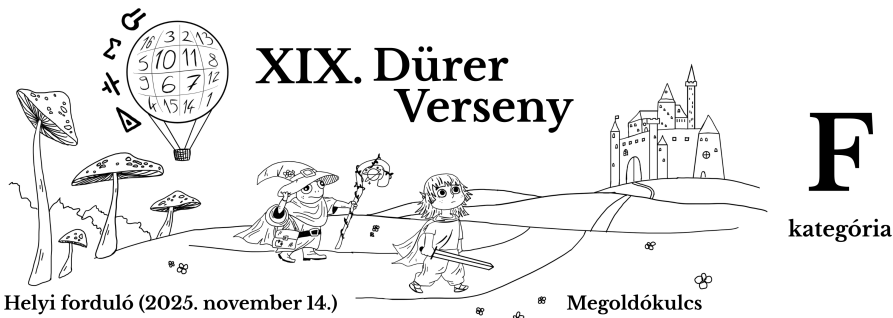




1. feladat

Legyen a test sebessége v , amikor éppen elhagyja a körívet. A kezdeti energia megegyezik eddig a pontig a kinetikus energia és a potenciális energia megváltozásának összegével:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 + \cos \alpha). \quad (1.1)$$

Innen a sebesség négyzetét kifejezve:

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + \cos \alpha). \quad (1.2)$$

A feladatból adott, hogy:

$$v_0^2 = kgR, \quad (1.3)$$

így az előző két egyenlet alapján:

$$v^2 = gR[k - 2(1 + \cos \alpha)]. \quad (1.4)$$

A körív két végpontja közti mozgás egy ferde hajítás, amelynek kezdősebessége v nagyságú, és α szöget zár be a vízszintessel. A hajítás során megtett vízszintes távolság a feladat szerint éppen megegyezik a rés szélességével:

$$\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = 2R \sin \alpha. \quad (1.5)$$

Behelyettesítve (1.4) eredményét, és kihasználva a kétszeres szögek azonosságát:

$$\frac{gR[k - 2(1 + \cos \alpha)] \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 2R \sin \alpha. \quad (1.6)$$

Mivel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, ezért $\sin \alpha \neq 0$, tehát oszthatunk vele:

$$[k - 2(1 + \cos \alpha)] \cos \alpha = 1. \quad (1.7)$$

Ez $\cos \alpha$ -ban egy másodfokú egyenlet, nullára rendezve

$$2 \cos^2 \alpha - (k - 2) \cos \alpha + 1 = 0 \quad (1.8)$$

adódik, melynek megoldásai a megoldóképlet alapján:

$$\cos \alpha = \frac{k - 2 \pm \sqrt{(k - 2)^2 - 8}}{4}. \quad (1.9)$$

(a)

Ez esetben $k = 5$, vagyis

$$\cos \alpha = \frac{3 \pm 1}{4}. \quad (1.10)$$

A $\cos \alpha = 1$ esethez $\alpha = 0$ tartozik, amely nem megengedett, így $\cos \alpha = 1/2$, tehát:

$$\boxed{\alpha = 60^\circ}. \quad (1.11)$$

(b)

Látható, hogy az (1.9) kifejezés akkor értelmezhető, ha:

$$(k - 2)^2 - 8 \geq 0, \quad (1.12)$$

vagyis

$$k \geq 2 + \sqrt{8} = 2 + 2\sqrt{2}, \quad (1.13)$$

avagy

$$2 - \sqrt{8} \geq k. \quad (1.14)$$

Az utóbbi egyenlőtlenség nyilvánvalóan nem teljesülhet, mivel k pozitív. Tehát k minimális értéke a fentiek szerint:

$$\boxed{k_{\min} = 2 + 2\sqrt{2}}, \quad (1.15)$$

ekkor (1.9) alapján:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (1.16)$$

ennek megoldása pedig:

$$\boxed{\alpha = 45^\circ}. \quad (1.17)$$

2. feladat

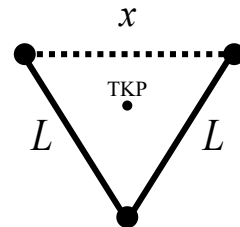
A lendületmegmaradást felírva:

$$mv_0 = 3mv_{\text{TKP}}, \quad (2.1)$$

ahonnan a tömegközéppont sebessége:

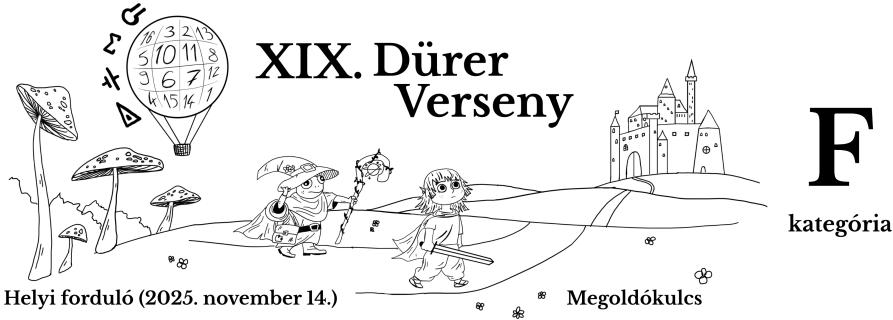
$$v_{\text{TKP}} = \frac{v_0}{3}. \quad (2.2)$$

Tehát kezdetben a tömegközéppont lassabb, mint a középső test, így távolodik tőle. Ez nyilván azért történik, mert a két szélső test „lemerad” a középsőhöz képest. Mivel a kötelek végig feszesek, így a három test által meghatározott háromszögnek két oldala L hosszú, a harmadik oldal hosszát pedig jelölje x , ahogy a 2.1. ábra is mutatja. A feladat meghatározni x legkisebb értékét.



2.1. ábra. A rendszer egy későbbi állapota.

Figyeljük meg, hogy amíg x csökken, addig a háromszög súlypontja (ami a rendszer tömegközéppontja) távolodik a középső testtől. Abban a pillanatban, ahogy x eléri a minimumát, ez a távolodás abbamarad, tehát a tömegközéppont rendszeréből nézve éppen ekkor lesz a középső test sebessége nulla. Ez azt jelenti, hogy ekkor ez a test $v_0/3$ sebességgel fog haladni. Ekkor viszont a másik két test is $v_0/3$ sebességgel halad, hiszen a rendszer szimmetrikus, így ez a



két test mindig ugyanakkora sebességgel mozog. Észrevehetjük azt is, hogy ebben a kritikus pillanatban minden sebességvektor párhuzamos $\mathbf{v}_0$ -al.

Most írjuk fel az energiamegmaradást x legkisebb értékére (azaz a kritikus pillanatban):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 2k\frac{Q^2}{L} + k\frac{Q^2}{2L} = \frac{3}{2}mv_{\text{TKP}}^2 + 2k\frac{Q^2}{L} + k\frac{Q^2}{x}. \quad (2.3)$$

Látható, hogy a szélső golyók és a középső golyó közötti potenciális energia nem változik, hiszen a kötelek hossza is változatlan. Felhasználva továbbá v_{TKP} értékét:

$$\frac{1}{3}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\frac{Q^2}{L} = k\frac{Q^2}{x}, \quad (2.4)$$

innen

$$x = \frac{6LkQ^2}{3kQ^2 + 2Lmv_0^2}. \quad (2.5)$$

3. feladat

(a)

Vizsgáljunk először csak egy lapátot, hiszen a homogén légáramlat (szél) miatt minden lap ugyanakkora forgatónyomatékot fog generálni. Egy lap keresztmetszete az áramlás irányára nézve:

$$A = Ld \cos \varphi. \quad (3.1)$$

A lapátra ható merőleges irányú légellenállási erő nagysága:

$$F_m = \frac{1}{2}A\rho v_0^2 C_m(\varphi) = \frac{1}{2}A\rho v_0^2(a - b\varphi^2). \quad (3.2)$$

A lapáttal párhuzamos erő nagysága:

$$F_p = \frac{1}{2}A\rho v_0^2 C_p(\varphi) = \pi A\rho v_0^2 \varphi. \quad (3.3)$$

Koordináta-rendszerünket vegyük fel úgy, hogy origója a lapát közepe legyen, az x tengely mutasson a szél irányába, a z tengely a lapát rögzítése felé, az y pedig a forgás síkjába. Így a lapátra ható y irányú erő:

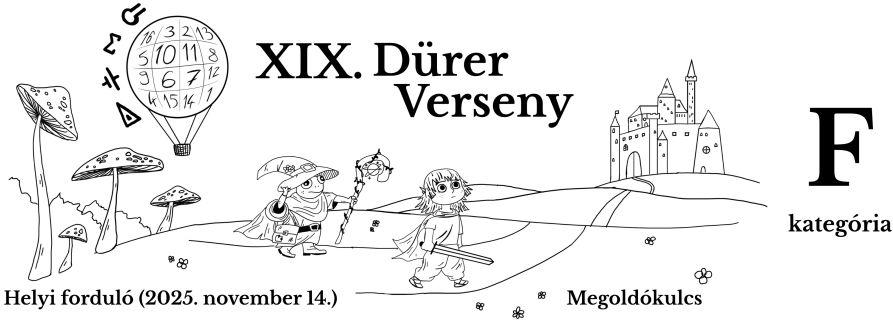
$$F_y = F_m \sin \varphi - F_p \cos \varphi. \quad (3.4)$$

Behelyettesítve a (3.2) és (3.3) egyenleteket:

$$F_y = A\rho v_0^2 \left[\frac{(a - b\varphi^2) \sin \varphi}{2} - \pi \varphi \cos \varphi \right]. \quad (3.5)$$

Mivel páros sok lapátból áll a szélkerék, így az x irányú erők forgatónyomatékai kioltják egymást, elég az y irányú erők forgatónyomatékát vizsgálni, ez a (b) részben már nem igaz.

$$M = \frac{L}{2} F_y. \quad (3.6)$$



Ez az x irányba mutat, tehát a szélre merőleges síkban forogat.

Minden lapátra ugyanez írható fel, így a teljes forgatónyomaték N -szer ekkora lesz. Behelyettesítve a (3.1) egyenletből A értékét:

$$\sum M = N \frac{L}{2} L d \cos \varphi \cdot \varrho v_0^2 \left[\frac{(a - b\varphi^2) \sin \varphi}{2} - \pi \varphi \cos \varphi \right]. \quad (3.7)$$

Felhasználhatjuk, hogy kis szögek esetén $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, így:

$$\sum M \approx N \frac{L}{2} L d \varrho v_0^2 \left[\frac{(a - b\varphi^2) \varphi}{2} - \pi \varphi \right]. \quad (3.8)$$

Továbbá a φ^3 -bel arányos tag elhanyagolhatóan kicsi, így a végeredmény:

$$\boxed{\sum M = \frac{1}{4} N L^2 d \varrho v_0^2 (a - 2\pi) \varphi}. \quad (3.9)$$

Jól látható, hogy a való világban épült szélérőművek lapátjai miért sokkal hosszabbak, mint amilyen szélesek. A fenti képletben a lapát hossza négyzetesen, a szélessége csak lineárisan szerepel.

(b)

Ebben az esetben is ugyanakkora lesz az y irányú erő, mint az (a) részben, azonban a lapátra ható x irányú (széllel párhuzamos) erőnek is lesz forgatónyomatéka, amit semmi nem „egyenlít ki”. Az a probléma ezzel az aszimmetrikus elrendezéssel, hogy a tengelyt terhelő, y irányú eredő forgatónyomaték is lesz. A lapra ható x irányú erő:

$$F_x = F_m \cos \varphi + F_p \sin \varphi. \quad (3.10)$$

Behelyettesítve az (a) részben írt erőket:

$$F_x = A \varrho v_0^2 \left[\frac{(a - b\varphi^2) \cos \varphi}{2} + \pi \varphi \sin \varphi \right]. \quad (3.11)$$

Innen az y irányú forgatónyomaték:

$$M_y = \frac{L}{2} F_x = \frac{1}{2} L^2 d \cos \varphi \varrho v_0^2 \left[\frac{(a - b\varphi^2) \cos \varphi}{2} + \pi \varphi \sin \varphi \right]. \quad (3.12)$$

Ismét felhasználva az (a) részben írt közelítéseket:

$$\boxed{M_y \approx \frac{1}{4} L^2 d \varrho v_0^2 a}. \quad (3.13)$$

Az x irányú forgatónyomaték változatlan a korábbi esethez képest, így

$$\boxed{M_x = \frac{1}{4} L^2 d \varrho v_0^2 (a - 2\pi) \varphi}. \quad (3.14)$$

Egy másik probléma ezzel az elrendezéssel, hogy ha a lapát éppen lent van, akkor sokkal nagyobb forgatónyomaték szükséges, hogy egyáltalán mozgásba jöjjön, és utána is nagyon egyenetlen lesz a forgás sebessége.

4. feladat

(a)

A ballon akkor száll fel, amikor a felhajtóerő nagyobb lesz, mint a ballontra ható nehézségi erő. Előbbi:

$$F_f = \varrho_0 V g, \quad (4.1)$$

a nehézségi erő pedig:

$$F_g = (m_0 + \varrho_a V) g. \quad (4.2)$$

Itt ϱ_a jelöli a hőlégballonban található levegő sűrűségét. A kritikus pillanatban a testre ható erők egyenlőek, tehát:

$$\varrho_0 V = m_0 + \varrho_a V. \quad (4.3)$$

Innen a kritikus pillanatban a sűrűség:

$$\varrho_a = \varrho_0 - \frac{m_0}{V}. \quad (4.4)$$

A hőlégballonban található levegőre az ideális gázok állapotegyenletét felírva:

$$p_k V = n_1 R T_a. \quad (4.5)$$

Itt felhasználtuk, hogy a hőlégballonban található gáz nyomása a külső légnyomással egyezik meg, hiszen a légcseré megengedett a két közeg között. A hőmérséklet a kritikus pillanatban T_a . Innen ezt a gáz sűrűségével kifejezve:

$$T_a = \frac{M p_k}{R \varrho_a}. \quad (4.6)$$

Ide behelyettesítve a (4.4)-ben kapott eredményt:

$$T_a = \frac{M p_k}{R} \cdot \frac{V}{\varrho_0 V - m_0}. \quad (4.7)$$

Ezt átalakítva:

$$\boxed{T_a = \frac{\varrho_0 V}{\varrho_0 V - m_0} T_0}. \quad (4.8)$$

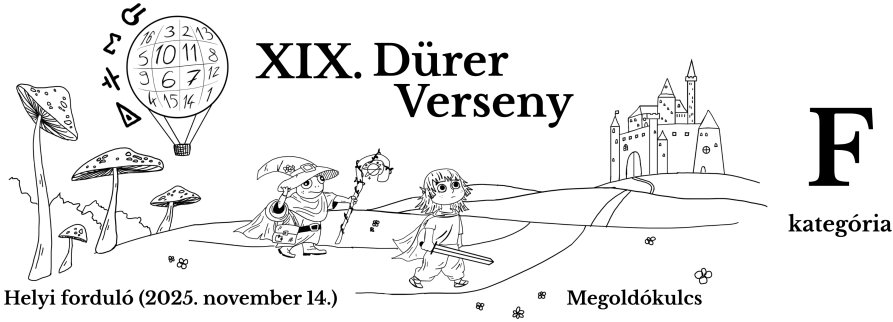
(b)

A talajszinten a légnyomás ballonon belül és kívül azonos, így érdemes mindkét gáztérben felírni a nyomást. A ballonon kívül:

$$p_0 = \varrho_0 \frac{R T_0}{M}, \quad (4.9)$$

a ballonon belül pedig:

$$p_0 = \varrho_1 \frac{R T_1}{M}. \quad (4.10)$$



Innen a belső sűrűség kifejezhető a hőmérsékletekkel:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{T_0}{T_1}. \quad (4.11)$$

A ballonra mindig a felhajtóerő és a nehézségi erő eredője fog hatni. Előbbinek a nagysága z magassággal a talaj felett:

$$F_f(z) = \varrho_k(z)Vg. \quad (4.12)$$

A nehézségi erő pedig állandó nagyságú:

$$F_g = (m_0 + \varrho_1 V)g. \quad (4.13)$$

Az eredő erő:

$$\sum F(z) = \varrho_k(z)Vg - (m_0 + \varrho_1 V)g. \quad (4.14)$$

Behelyettesítve a feladatban megadott $\varrho_k(z)$ értéket:

$$\sum F(z) = -\alpha Vgz + (\varrho_0 V - m_0 - \varrho_1 V)g. \quad (4.15)$$

Láthatjuk, hogy az eredő erő utolsó tagja konstans, az első pedig z -vel egyenesen arányos, a kitérés irányával ellentétes irányú. Mivel a teljes tömeg állandó, ebből tudjuk, hogy a hőlégballon harmonikus rezgőmozgást fog végezni valamilyen z_0 egyensúlyi helyzet körül –ha felszáll–akárcsak egy rugóra akasztott test. A z_0 magasságban az eredő erő zérus lesz:

$$\alpha V z_0 = \varrho_0 V - \varrho_1 V - m_0. \quad (4.16)$$

Innen az egyensúlyi z_0 magasság:

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \left(\varrho_0 - \varrho_1 - \frac{m_0}{V} \right). \quad (4.17)$$

A maximális magasság ennek a kétszerese lesz. Felhasználva (4.11)-et:

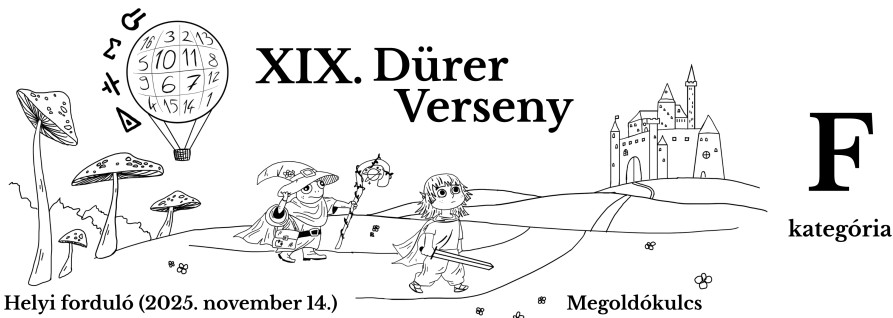
$$z_{\max} = \frac{2}{\alpha} \left[\varrho_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) - \frac{m_0}{V} \right]. \quad (4.18)$$

A keresett időt a rezgés periódusidejéből kapjuk. Ehhez a (4.15)-ös egyenletből fejezzük ki a hőlégballon gyorsulását:

$$a(z) = -\frac{\alpha Vg}{m_0 + \varrho_1 V} \cdot z + \frac{\varrho_0 Vg - \varrho_1 Vg - m_0 g}{m_0 + \varrho_1 V}. \quad (4.19)$$

A rugóra akasztott test analógiájából tudjuk, hogy az első tag $-\omega^2 z$ -vel feleltethető meg, ahol ω a rezgés körfrekvenciája. Ezt felírva:

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha Vg}{m_0 + \varrho_1 V}}. \quad (4.20)$$



Innen a periódusidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_0 + \varrho_1 V}{\alpha V g}}. \quad (4.21)$$

A maximális magasság eléréséig eltelt idő ennek a fele lesz. Felhasználva (4.11)-et:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{m_0 T_1 + \varrho_0 V T_0}{\alpha V g T_1}}. \quad (4.22)$$

5. feladat

A teljes áramkör ellenállását jelölje R . Ekkor nyilván a kérdőjellel jelölt doboz ellenállása is R , így felírható, hogy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R} + \frac{1}{R_2 + x}, \quad (5.1)$$

ahonnan átrendezés után

$$x = \frac{R_1 R + R^2 - R_1 R_2}{R_1} \quad (5.2)$$

adódik. Mivel a feszültségmérő 0 V-ot jelez, így

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R}{x}, \quad (5.3)$$

amelybe az (5.2) egyenlet szerint x -et helyettesítve:

$$R^2 + R(R_1 - R_2) - R_1 R_2 = 0. \quad (5.4)$$

A másodfokú egyenletet megoldva a két megoldás R_2 és $-R_1$, de mivel R pozitív (ahogy R_1 és R_2 is), így az egyetlen fizikai megoldás

$$R = R_2. \quad (5.5)$$

Ezt az (5.2) egyenletbe helyettesítve kapjuk a végeredményt:

$$x = \frac{R_2^2}{R_1}. \quad (5.6)$$