

1. feladat

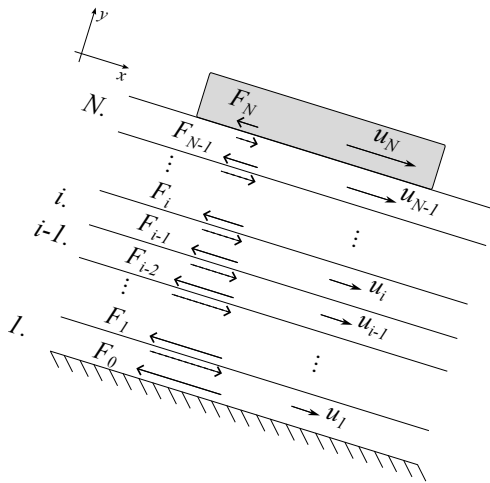
Mivel a feladat szerint „hosszú idő után” a kő állandó nagyságú sebességgel halad a lejtő síkjával párhuzamosan, feltételezhetjük, hogy a láva áramlása már állandósult, és csak a lejtő irányával párhuzamos sebességkomponenssel rendelkezik. Tehát minden folyadékdarabka, valamint a kő is egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, a rá ható erők eredője zérus.

A lejtő irányával párhuzamosan felírva a kőre a dinamika alapegyenletét:

$$mg \sin \alpha = F_f, \quad (1.1)$$

ahol F_f a kő aljára ható, folyadéktól származó erő (mely egy, a „tapadási súrlódáshoz” hasonló jellegű erőként is elképzelhető, hiszen a felső réteg és a kő együtt mozognak); a feladat nehézsége ennek meghatározásában rejlik.

Az útmutatásban leírt ötletet alkalmazva bontsuk a lávát vékony rétegekre a lejtő síkjával párhuzamosan és vizsgáljuk egy-egy ilyen kicsiny vastagságú réteg mozgását!



1.1. ábra. A láva kicsiny rétegekre bontása.

Legyen az egyenlő vastagságú rétegek száma N , ekkor egy réteg vastagsága $\Delta y = h/N$. Jelölje az i -edik kicsiny réteg lejtővel párhuzamos sebességét u_i . Ekkor az i -edik folyadékréteg tetején (pozitív y) fellépő nyíróerő:

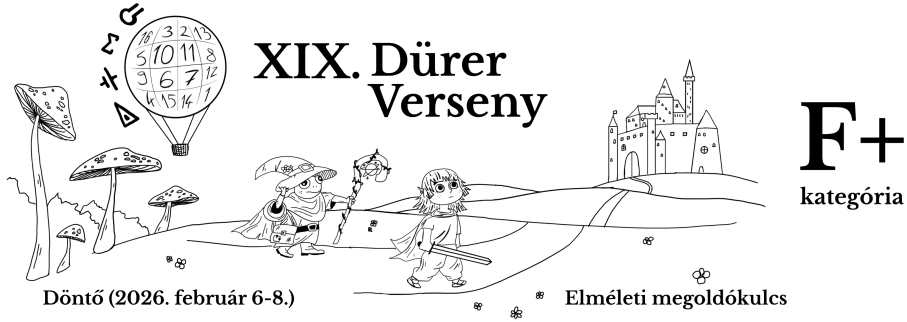
$$F_i = \mu A \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y}. \quad (1.2)$$

Mivel a folyadék is állandósult állapotban van, minden kis rétegnek egyensúlyban kell lennie. Az i -edik rétegre felírva az erőegyensúlyt a lejtővel párhuzamosan:

$$F_{i-1} - F_i = \rho A \Delta y g \sin \alpha \implies F_i = F_{i-1} - \rho A \Delta y g \sin \alpha. \quad (1.3)$$

A fenti egyenlet egy rekurzív képletet ad az egyes határfelületeken fellépő nyíróerőre, ezt megoldva F_i -re a következő összefüggés adódik:

$$F_i = F_0 - i \rho A \Delta y g \sin \alpha, \quad (1.4)$$



ahol F_0 a talajról átadódó erő. Felhasználva (1.1)-et, az N -edik erőre a következő egyenlet írható fel:

$$F_N = F_f = mg \sin \alpha = F_0 - N \varrho A \Delta y g \sin \alpha. \quad (1.5)$$

Kihasználva, hogy $\Delta y N = h$:

$$mg \sin \alpha = F_0 - \varrho A h g \sin \alpha, \quad (1.6)$$

azaz a talajról átadódó erő:

$$F_0 = mg \sin \alpha + \varrho A h g \sin \alpha. \quad (1.7)$$

A legfelső réteg (azaz a kő) állandósult sebességét a kicsiny folyadékrétegek között bekövetkező „sebességugrások” összege adja:

$$U = \sum_{i=1}^N (u_i - u_{i-1}), \quad (1.8)$$

amely az (1.2) egyenlet alapján:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta y}{\mu A} F_i. \quad (1.9)$$

Behelyettesítve (1.4)-et:

$$U = \frac{\Delta y}{\mu A} \sum_{i=1}^N (F_0 - i \varrho A \Delta y g \sin \alpha), \quad (1.10)$$

majd felbontva az összegzést az állandó tagokat kihozva:

$$U = \frac{\Delta y}{\mu A} \left(N F_0 - \varrho A \Delta y g \sin \alpha \sum_{i=1}^N i \right). \quad (1.11)$$

A megmaradt összegzés éppen a pozitív egész számok összege 1-től N -ig, melyre használhatjuk a jól ismert $N(N+1)/2$ összegképletet:

$$U = \frac{\Delta y}{\mu A} \left(N F_0 - \varrho A \Delta y g \sin \alpha \frac{N(N+1)}{2} \right). \quad (1.12)$$

Ismét felhasználva, hogy $\Delta y N = h$:

$$U = \frac{h}{\mu A} \left(F_0 - \varrho A h g \sin \alpha \frac{N+1}{2N} \right). \quad (1.13)$$

Behelyettesítve (1.7)-et és csoportosítva a tagokat:

$$U = \frac{mgh \sin \alpha}{\mu A} + \frac{h^2 \varrho g \sin \alpha}{\mu} \left(1 - \frac{N+1}{2N} \right) = \frac{mgh \sin \alpha}{\mu A} + \frac{h^2 \varrho g \sin \alpha}{\mu} \frac{N-1}{2N}. \quad (1.14)$$

A diszkrét modellünk az $N \rightarrow \infty$ esetben adja vissza a folytonos folyadékot. Ekkor az N -t tartalmazó tört határértéke $1/2$, azaz a kapott összefüggés:

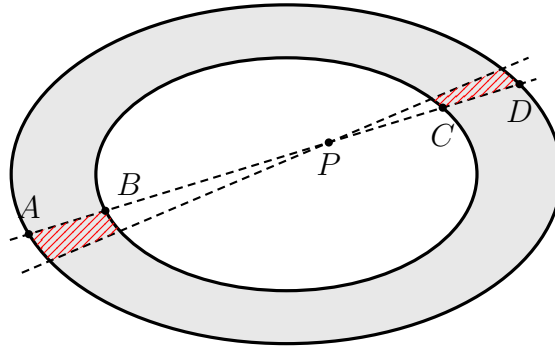
$$U = \frac{mgh \sin \alpha}{\mu A} + \frac{h^2 \varrho g \sin \alpha}{2\mu}. \quad (1.15)$$

A fenti kifejezésben már csak a keresett dinamikai viszkozitás az ismeretlen, erre rendezve:

$$\mu = \frac{h \sin \alpha}{U} \left(\frac{mg}{A} + \frac{\varrho gh}{2} \right). \quad (1.16)$$

2. feladat

Először belátjuk, hogy – a gömb esetével analóg módon – ha egy tömör ellipszoidot hasonló ellipszoidok által határolt héjakra bontunk, egy belső pont csak a belső héjak gravitációs hatását érzi. Tekintsünk egy tetszőleges P pontot az üreges, vékony héj belsejében, és vegyünk két ellentétes irányú, kis $\Delta\Omega$ térszögű kúpot. A kúpok a héjból ΔA_1 és ΔA_2 felületdarabokat metszenek ki r_1 és r_2 távolságokban. A térszög definíciója alapján $\Delta A_i = r_i^2 \Delta\Omega$. Mivel a héjat határoló felületek hasonlóak és koncentrikusak, geometriai tétel, hogy a héj vastagsága látóirányban mérve a két oldalon megegyezik ($AB = CD$ a 2.1. ábrán). A kivágott tömegek aránya tehát csak a távolságok négyzetével arányos ($\Delta m \sim r^2$), ami éppen kiejti a gravitációs erő $1/r^2$ -es csökkenését. Így a két szemközti felületelem vonzása semlegesíti egymást.



2.1. ábra. A geometriai tétel illusztrációja a tárgyalt elrendezésben.

A P pontban az összes rajta kívül eső héj gravitációs hatása nulla, mivel az előző érvelés tetszőleges irányra alkalmazható. Azaz a P pont térerősségét kizárólag a ponton átmenő, az eredetivel hasonló belső ellipszoid határozza meg. Tehát egy tetszőleges $\mathbf{r}$ helyvektorral jellemezhető pontban a gravitációs térerősség:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G\varrho \int_{V_r} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} dV, \quad (2.1)$$

ahol $\mathbf{x}$ a térfogati integrál változója.

Végezzünk el egy λ -szorosára történő nagyítást a teljes rendszeren. Ezzel egy hasonló, de más méretű ellipszoidot kapunk. A pozícióvektorok $\mathbf{r}' = \lambda\mathbf{r}$, $\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}$ és a térfogatelem $dV' = \lambda^3 dV$ transzformációja után az integrálból λ kiemelhető. Ekkor arra jutunk, hogy $\mathbf{g}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda\mathbf{g}(\mathbf{r})$, vagyis a térerősség lineárisan függ a helyvektortól.

Felhasználva a galaxis laposságát, jó közelítéssel minden mozgás a galaxis síkjában történik. Ekkor a gravitációs erő galaktikus síkba eső komponense biztosítja az anyag centripetális gyorsulását, így:

$$mg(r) = m\omega^2 r. \quad (2.2)$$

Mivel a gravitációs térerősség lineáris, következik, hogy a galaxis merev testként forog, állandó ω szögsebességgel:

$$v(r) = \omega r. \quad (2.3)$$

A mozgási energia kiszámításához szükségünk van a rendszer tehetetlenségi nyomatékára és a kinematikai adatokra. A tömegközépponti (v_{TK}) és a kerületi (v_{ker}) sebességek a mért adatokból:

$$v_{TK} = \frac{v_A + v_B}{2}, \quad v_{ker} = \omega R = \frac{v_A - v_B}{2}. \quad (2.4)$$

A forgási ellipszoid z forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka megegyezik egy R sugarú, M tömegű homogén gömbével, mivel a z irányú lapítás nem változtatja meg a tömegelemek forgástengelytől mért távolságát, tehát $\Theta = 2MR^2/5$. A teljes mozgási energia a tömegközéppont haladásából és az akörül történő forgásból adódik össze:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} M v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} M \left(\frac{v_A + v_B}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M R^2 \right) \left(\frac{v_A - v_B}{2R} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Egyszerűsítés után a végeredmény:

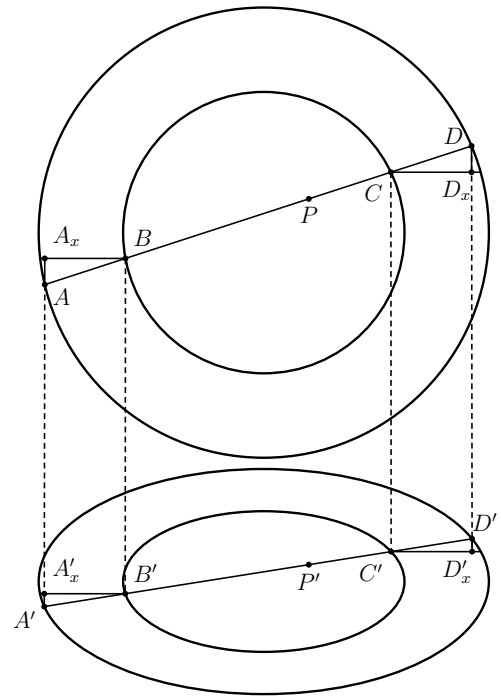
$$E_{kin} = \frac{M}{8} (v_A + v_B)^2 + \frac{M}{20} (v_A - v_B)^2. \quad (2.6)$$

Megjegyzés

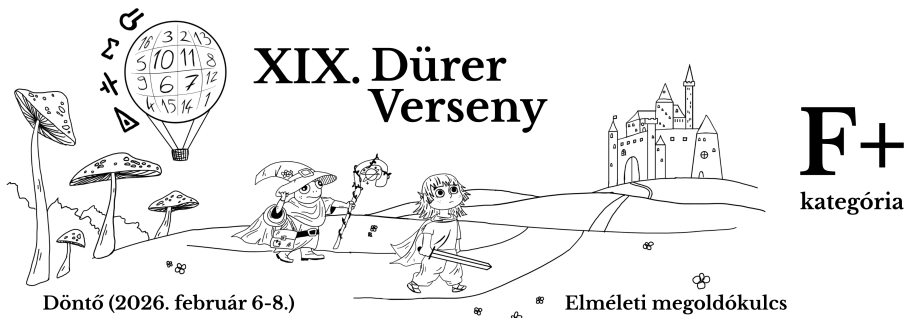
Hogy teljesebb képet kapjunk, az alábbiakban ki-
térünk a feladat útmutatásában megadott és a meg-
oldás során felhasznált geometriai tétel bizonyítására.
Tekintsük ehhez a 2.2. ábrán látható affin transzformá-
ciót, amely két koncentrikus kört az esetünkben vizsgált
koncentrikus ellipszisekbe visz át.

Metsszük el az eredeti kört egy tetszőleges P bel-
ső ponton áthaladó egyenessel, ekkor a metszéspontok
rendre A, B, C és D . Legyen továbbá az A pontnak az
affinitás irányában B -vel egy magasságba vetített képe
 A_x . Hasonlóan definiálhatjuk a D_x pontot is. A fenti
pontok képei az affin transzformáció után $A', B', C',$
 D', A'_x és D'_x .

A kör szelőire könnyen látható, hogy $\overline{AB} = \overline{CD}$, to-
vábbá $\overline{A_x B} = \overline{C D_x}$ és $\overline{A_x A} = \overline{D_x D}$. Az affinitás irányá-
val párhuzamos szakaszok hossza a transzformáció ha-
tására λ -szorosára csökken, míg a merőleges szakaszok
hossza változatlan. Így $\overline{A_x B} = \overline{C D_x} = \overline{A'_x B'} = \overline{C' D'_x}$,
illetve $\lambda \overline{A_x A} = \overline{A'_x A'}$ és $\lambda \overline{D D_x} = \overline{D' D'_x}$. Mindezekből
a Pitagorasz-tétel felhasználásával könnyedén adódik a
kívánt végeredmény: $\overline{A' B'} = \overline{C' D'}$.



2.2. ábra. A felhasznált geometriai tétel bizonyítása egy affin transzformáció segítségével.



3. feladat

A feladatban közölt leírás alapján a kavitáció jelenségének szempontjából kritikus szakasz a beszűkült keresztmetszet. Itt ugyanis a kontinuitás törvénye alapján az áramlási sebesség hirtelen növekszik, ez pedig a Bernoulli-törvény értelmében a nyomás hirtelen csökkenését eredményezi, ami éppen a kavitáció kiváltó oka. Elsőként tehát határozzuk meg a kavitációhoz tartozó kritikus gőznyomás értékét!

A beszűkült keresztmetszetben az áramlási sebesség (kontinuitás alapján, összenyomhatatlan folyadékot feltételezve):

$$A_0 u_0 = \frac{A_0}{5} u_1 \implies u_1 = 5u_0. \quad (3.1)$$

Bernoulli-törvényét felírva egy a szűkület előtti és a szűkületbeli pontra:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \implies p_1 = p_0 + \frac{1}{2} \rho (u_0^2 - u_1^2), \quad (3.2)$$

majd a (3.1) egyenletet felhasználva a szűkületbeli nyomás:

$$p_1 = p_0 - 12 \rho u_0^2 = 42 \text{ kPa}. \quad (3.3)$$

Kavitáció abban az esetben történik, ha a telített gőznyomás eléri a fentiekben kiszámolt nyomásértéket, azaz $p_{\text{kav}} = p_2 = 42 \text{ kPa}$. A mellékelt telített gőznyomás-hőmérséklet grafikon alapján az ehhez tartozó hőmérséklet: $T_{\text{krit}} \approx 76^\circ \text{C}$.

Mivel a feladatban közölt ábra alapján a fűtőelem éppen a kritikus keresztmetszet előtt helyezkedik el, ezért a kavitáció jelensége akkor lépne fel, mikor az első, fűtőelemből kilépő folyadékdarabka hőmérséklete eléri T_{krit} értékét. **Tehát a teljes folyadéknak nem kell T_{krit} hőmérsékletre melegednie!**

Határozzuk meg, hogy a fűtőelemen áthaladva mennyivel növekszik a víz hőmérséklete! Ehhez elsőként írjuk fel a tervezett paraméterek mellett kialakuló a tömegáramot:

$$\dot{m} = \rho \frac{D_0^2 \pi}{4} u_0. \quad (3.4)$$

Ezt felhasználva a hőmérséklet-növekedés:

$$\Delta T_f = \frac{P}{c_v \dot{m}} = \frac{4P}{\pi c_v \rho u_0 D_0^2} = 0,81^\circ \text{C}, \quad (3.5)$$

tehát a teljes víztömegnek ennyivel kisebb hőmérsékletet kell elérnie a kritikushoz képest, hogy a kavitáció kialakulhasson. A szükséges hőközlés:

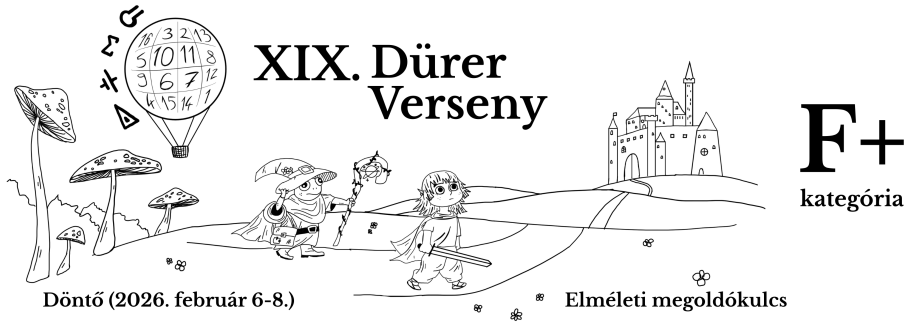
$$Q = c_v m \Delta T = c_v m (T_{\text{krit}} - \Delta T_f - T_0). \quad (3.6)$$

Ez alapján a melegítés időtartama a megadott fűtőteljesítményt felhasználva:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{c_v m (T_{\text{krit}} - \Delta T_f - T_0)}{P}, \quad (3.7)$$

a numerikus értékeket behelyettesítve:

$$\boxed{t = 5767 \text{ s} \approx 96 \text{ min}}. \quad (3.8)$$



4. feladat

A legkülső (ábrán is látható) feketedoboz ellenállását jelölje R_3 . Vegyük észre, hogy a teljes rendszer mindössze annyiban különbözik ennek a doboznak a belsejétől, hogy ez utóbbiban minden ellenállás α -szorososa az eredeti áramkör ellenállásértékeinek. Tehát míg az eredeti rendszer i . szintjén a bal felső ellenállás $\alpha^{i-1}R_1$, addig a doboz i . szintjén ugyanez az ellenállás $\alpha^i R_1$. A Kirchhoff- és Ohm-törvények linearitása miatt ez azt jelenti, hogy

$$R_3 = \alpha R_e, \quad (4.1)$$

ahol R_e a teljes rendszer eredő ellenállását jelenti a C és D pontok között. A felső ágban sorosan kapcsolódik R_1 és R_3 , míg az alsó ágban R_2 és az ismeretlen x . Ennek megfelelően a felső, illetve alsó ág eredő ellenállása:

$$R_f = R_1 + R_3, \quad (4.2)$$

$$R_a = R_2 + x. \quad (4.3)$$

Az A és B pontok ekvipotenciálisak, vagyis a két pont közötti feszültség zérus. Ez azt jelenti, hogy a felső és alsó ágban azonos arányban oszlik meg a feszültség. Ezért a feszültségosztásra az alábbi összefüggés írható fel:

$$\frac{R_1}{R_f} = \frac{R_2}{R_a}. \quad (4.4)$$

A definíciókat behelyettesítve:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{R_2}{R_2 + x}. \quad (4.5)$$

Az egyenletet x -re rendezve:

$$x = \frac{R_2}{R_1} R_3. \quad (4.6)$$

A teljes áramkör eredő ellenállása a két ág párhuzamos kapcsolásából adódik:

$$R_e = \frac{R_f R_a}{R_f + R_a}. \quad (4.7)$$

A (4.5) összefüggés szerint

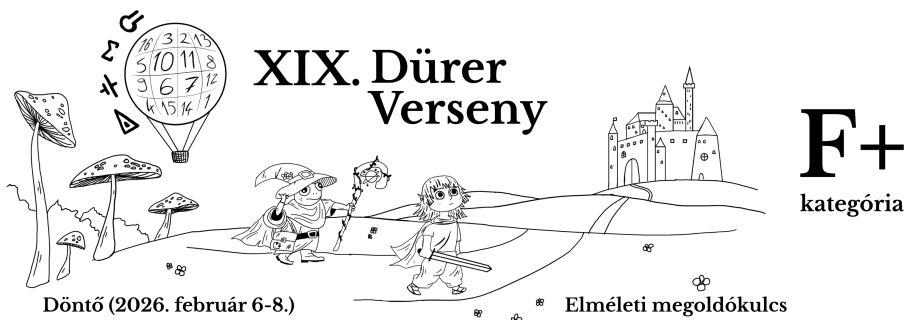
$$R_a = \frac{R_2}{R_1} R_f, \quad (4.8)$$

amit behelyettesítve (4.7)-be, egyszerűsítés után:

$$R_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_f \quad (4.9)$$

adódik, amibe (4.2)-t és (4.1)-et helyettesítve:

$$R_3 = \alpha \frac{R_2}{R_1 + R_2} (R_1 + R_3). \quad (4.10)$$



F+
kategória

Az egyenletet R_3 -ra megoldva:

$$R_3 = \frac{\alpha R_1 R_2}{R_1 + R_2(1 - \alpha)}. \quad (4.11)$$

Ebből, valamint a (4.6) összefüggésből a keresett x ellenállás:

$$x = \frac{\alpha R_2^2}{R_1 + R_2(1 - \alpha)}. \quad (4.12)$$

5. feladat

1. megoldás

A feladat megoldásához azt kell megérteni, hogyha egy test végigmegy egy pályán, és egy másik kétszer olyan gyorsan megy végig ugyanazon a pályán, akkor az utóbbi sebessége kétszer, gyorsulása négyszer akkora lesz, mint az előbbié.

Ehhez először nézzük meg, hogy mi történne, ha ugyanabba az irányba lőnénk ki külön a részecskéket, de a másodikat az elsónél kétszer nagyobb sebességgel. Írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = k \frac{Qq}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1, \quad m\ddot{\mathbf{r}}_2 = k \frac{4Qq}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2. \quad (5.1)$$

Tegyük fel, hogy az első egyenlet megoldása $\mathbf{r}_1$. Vegyük észre, hogy ekkor az $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(2t)$ hozzárendeléssel megadott $\mathbf{r}_2$ függvény megoldása lesz a második egyenletnek. Ennek igazolásához először vizsgáljuk meg a gyorsulások viszonyát a deriválás láncszabálya szerint:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = 4\ddot{\mathbf{r}}_1(2t). \quad (5.2)$$

Az első, $\mathbf{r}_1$ -re vonatkozó mozgásegyenletet behelyettesítve:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = 4m\ddot{\mathbf{r}}_1(2t) = 4k \frac{Qq}{|\mathbf{r}_1(2t)|^3} \mathbf{r}_1(2t) = k \frac{4Qq}{|\mathbf{r}_2(t)|^3} \mathbf{r}_2(t). \quad (5.3)$$

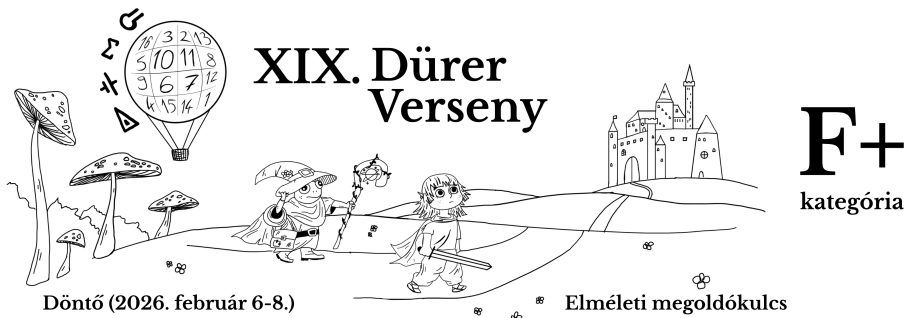
Ebből tehát látható, hogy a fent definiált $\mathbf{r}_2$ valóban kielégíti a második mozgásegyenletet. Így ha az egyik részecske végigmegy valamilyen tetszőleges pályán, akkor elviekben a másik test is végig tud menni ugyanazon pályán, kétszer olyan gyorsan.

De mi határozza meg, hogy milyen pályán mozog a test? A kezdőfeltételek! Tegyük fel, hogy az első test kezdőfeltételei $\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_1(t=0)$ és $\dot{\mathbf{r}}_1(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(t=0)$. Ekkor észrevehetjük, hogy $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(2t)$ illeszthető a második test kezdőfeltételeihez, mivel:

$$\mathbf{r}_2(0) = \mathbf{r}_1(0), \quad \dot{\mathbf{r}}_2(0) = 2\dot{\mathbf{r}}_1(0). \quad (5.4)$$

Tehát a két test valóban ugyanazon a pályán fog mozogni, csak a második kétszer olyan gyorsan, mint az első.

Innen már csak azt kell végiggondolni, hogy min változtat az, hogy a második testet az ellenkező irányba lőjük ki. Csak annyit, hogy ugyanazon pályán az ellenkező irányba fog haladni. A fentiek alapján tehát a megtett utak aránya 1 : 2, és a testek akkor találkoznak, amikor a kettejük által megtett út összege kiadja a teljes pályát. Ez a pálya egyharmadánál lesz, azaz $T/3$ idővel az indítás után.



2. megoldás

A megoldás első lépéseként használjuk ki, hogy egy tetszőleges $q > 0$ töltés pályája egy rögzített $Q < 0$ töltés körül olyan ellipszis, melynek a fél nagytengelye és a q töltés teljes E_t energiája közti összefüggés:

$$E_t = \frac{kQq}{2a}. \quad (5.5)$$

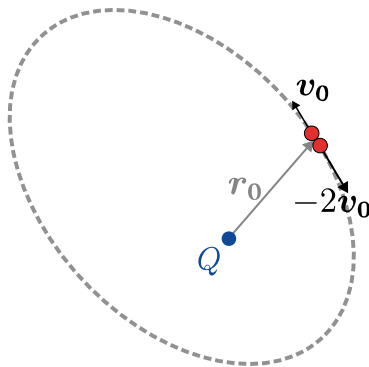
Ezt felhasználva a feladat q töltésére:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{kQq}{r_0} = \frac{kQq}{2a_q}, \quad (5.6)$$

míg a másik kis töltésre:

$$\frac{1}{2}m(2v_0)^2 + \frac{4kQq}{r_0} = \frac{4kQq}{2a_{4q}}. \quad (5.7)$$

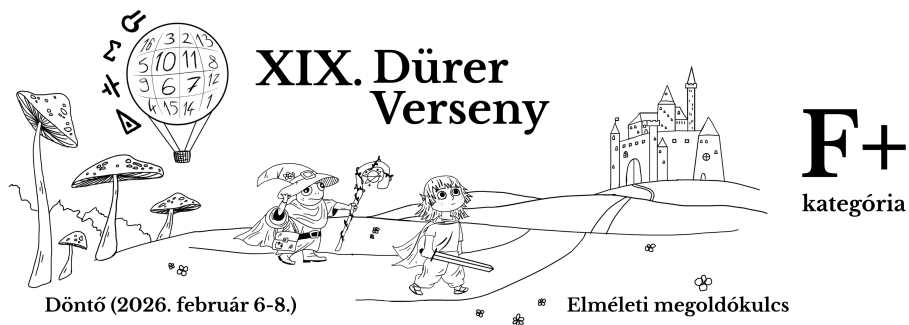
Az (5.6) és (5.7) egyenleteket összehasonlítva látszik, hogy utóbbiban egy négygyel való egyszerűsítés után $a_q = a_{4q}$ adódik, azaz a két mozgó töltés pályájának fél nagytengelye ugyanakkora. Mivel a kiinduláskor a két töltés egy pontból indul ellentétes irányú sebességgel, így a pályájuk érintője egyezik és tudjuk, hogy a pályák fókuszpontja és fél nagytengelye is ugyanaz. Ebből következik, hogy a két test egy pályán mozog¹, ahogy az 5.1. ábrán látható.



5.1. ábra. A töltések kiinduló elrendezése és pályája.

Az energiamegmaradás egyenletét a pálya tetszőleges pontjára felírhatjuk. Az (5.6) és (5.7) közti 4-es szorzó miatt egy adott pontban a $4q$ töltés mindig kétszer akkora sebességgel halad, mint a q töltésű test haladna azon pontban. Ezáltal a $4q$ töltés periódusideje $T/2$. (Ez Kepler III. törvényének megfelelő alkalmazásával is adódik.)

¹Bár az állítás nem teljesen triviális, röviden belátható annak ismeretében, hogy egy ellipszis adott pontjából két fókuszához húzott vezéregyenesek szögfelezője merőleges az ellipszis érintőjére. Konkrétabban, mivel a Q töltés helye, mint fókuszpont és a fél nagytengely adott, az egyetlen szabadsági fokunk a másik fókuszpont helyzete. Ennek különböző megválasztásai esetén a fent említett szögfelező más és más irányú, így az arra merőleges érintők is. Összességében tehát egyedül akkor eshet egybe a két pálya érintője, ha azok második fókuszai, és így a teljes ellipszisek is azonosak.



Összefoglalva, a két töltés ugyanazon pályán halad ellentétes irányban, és az egyik területi sebessége minden pillanatban duplája a másikénak, tehát a töltések azon pontban találkoznak újra, ahol 1:2 arányban súrolták az ellipszis területét. Ide pedig $T/3$ idő elteltével jutnak el az indulástól mérten.