

C1. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Törpilla, Törpliliom, Törpvirág, Dulifuli, Okoska és Ügyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

- Törpilla: Közvetlenül utánam Okoska vagy Ügyi érkezett be, valamint Dulifuli és köztem pontosan három törp végzett.
- Törpliliom: Törpvirág, Dulifuli és Okoska is előttem ért be.
- Törpvirág: 5. lettem.
- Dulifuli: Nem szeretek dobogón végezni és nem is kerültem oda.
- Okoska: Nem Dulifuli és nem Ügyi ért be közvetlenül utánam.
- Ügyi: 2. lettem és a dobogón Törpilla és Okoska szerepelt velem együtt.

Milyen sorrendben végzett a hat törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

Mohay Lili feladata

1. megoldás:

Próbáljuk végig mind a hat esetet, aszerint hogy melyik törp tévedett.

1. eset: Törpilla tévedett, akkor mindenki más igazat mondott. Törpvirág 5., Törpliliom mögötte végzett (6.), Dulifuli nem dobogós, ezért 4. lett. Ügyi állításának második fele ekkor már teljesül, valamint ő a 2. helyezett. Azonban ha Okoska az 1., akkor Ügyi, ha Okoska a 3., akkor Dulifuli ért be közvetlenül utána, tehát Okoskának is tévednie kellett, ami ellentmondás.

2. eset: Törpliliom tévedett. Az előző gondolatmenethez hasonlóan: Törpvirág 5., Ügyi 2. és mivel Okoska dobogós, de nem lehet Ügyi mögötte, így Okoska a 3., Törpilla az 1. Mivel az állítása igaz, így Dulifuli 5., de ott Törpvirág végzett és nincsen holtverseny. Ismét ellentmondást kaptunk.

3. eset: Törpvirág tévedett. Így a 2. eset gondolatmenete szerint Törpilla 1., Ügyi 2., Okoska 3., Dulifuli 5. (ezzel az ő állítása teljesül is). Törpliliom és Törpvirág rendre 6. illetve 4., mert Törpliliomnak Törpvirág mögött kellett végeznie. Ekkor minden állítás teljesül, kivéve Törpvirágé, tehát ez egy jó megoldás.

4. eset: Dulifuli tévedett. Mivel Ügyi, Törpilla és Okoska is igazat mond, így Törpilla 1., Ügyi 2., Okoska 3. és Dulifuli 5., de akkor Törpvirág is tévedett, ami ellentmondás.

5. eset: Okoska tévedett. Ügyi és Törpilla igazat mondott, ezért Ügyi 2.. Törpilla nem lehet 3., mert akkor nem Ügyi vagy Okoska lenne mögötte, tehát ő az 1., és így Okoska csak 3. lehet Ügyi állítása miatt. Törpilla válasza miatt Dulifuli 5., de akkor Törpvirággal ütközik megint, ami nem lehet.

6. eset: Ügyi tévedett. Az 1. esethez hasonlóan Törpvirág 5., Törpliliom 6. (mert mögötte végzett), Dulifuli 4. (mert nem dobogós). De ekkor Törpilla és Dulifuli közt 3 törp végzett, tehát Törpilla 0. helyezett lenne, és az nem lehet.

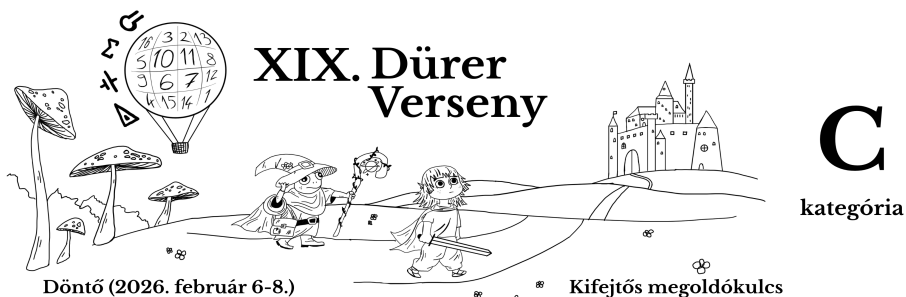
Mind a hat esetet megvizsgáltuk és csak a 3. eset lehetséges. A jó sorrend: 1. Törpilla, 2. Ügyi, 3. Okoska, 4. Törpvirág, 5. Dulifuli, 6. Törpliliom.

2. megoldás:

Tegyük fel, hogy Törpilla, Ügyi és Törpvirág is igazat mondott. Ügyi állítása miatt ő a 2., Törpilla és Okoska pedig szintén dobogósok. Törpilla nem lehet 3., mert akkor nem Ügyi vagy Okoska végzett volna mögötte, így Törpilla nyert. Az állítása másik része miatt Dulifuli 5. lett, ez azonban ellentmond Törpvirág állításának. Tehát a három törp között kell lennie annak, aki tévedett. A másik három esetben az előző megoldáshoz hasonlóan járhatunk el.

C2. Adott 2026 négyzet egy sorban. Mutassátok meg, hogy akárhogyan írunk relációs jeleket ($<$, vagy $>$) a négyzetek közé, mindig ki lehet tölteni a négyzeteket az $1, 2, \dots, 2026$ számokkal úgy, hogy minden négyzetbe egy szám kerüljön, minden számot egyszer használjunk és teljesüljenek a relációk!

Az ábrán látható egy példa öt négyzetre valamilyen relációs jelekkel, és egy helyes kitöltéssel az $1, 2, 3, 4, 5$ számokkal.



$$\boxed{4} > \boxed{2} > \boxed{1} < \boxed{5} > \boxed{3}$$

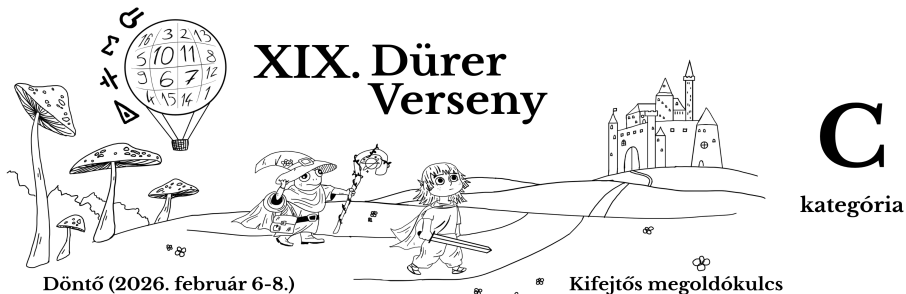
Nagy Kartal és Horváth Áron feladata

1. megoldás: Induljunk a bal szélső négyzet felől és sorrendben írjunk mindig egy számot az éppen következő négyzetbe. Először nézzük meg, hogy az első relációs jel mit mutat: ha az első négyzet nagyobb, mint a második, akkor írjuk be az első négyzetbe a 2026-ot, ha viszont kisebb, akkor az 1-et. Így az előbbi esetben megmaradnak még a számok 1-től 2025-ig, a második esetben pedig 2-től 2026-ig. Innentől kezdve ezt a lépést ismételve haladunk a soron következő négyzetre: ha az adott négyzet nagyobb az öt követő négyzetnél, akkor a megmaradt számok közül a legnagyobbat írjuk bele, ha kisebb az öt követőnél, akkor pedig a megmaradt számok közül a legkisebbet. Ezzel a módszerrel ki tudjuk tölteni 1-től 2026-ig a számokkal a négyzeteket. Most még megmutatjuk, hogy ez a kitöltés tényleg megfelel a relációs jeleknek. Az első relációs jel teljesül biztosan, hiszen bármi is áll tőle jobbra, a 2026 nagyobb az összes többi számnál, a másik esetben pedig az 1 kisebb az összes többi számnál. Hasonlóan a második relációs jel is teljesül, mert ha a második négyzet kisebb a harmadiknál, akkor oda írtuk a megmaradt számok legkisebbjét, ha pedig nagyobb, akkor a legnagyobbját írtuk bele. Ehhez hasonló indoklás minden relációs jelre fog működni, hiszen minden pillanatban az éppen beírt szám az vagy nagyobb minden megmaradt számnál, vagy kisebb minden megmaradt számnál (attól függően hogy az előzőnél kisebb vagy nagyobb volt az aktuális szám). Vagyis tényleg minden pillanatban folytatható helyesen az eljárásunk, vagyis helyes kitöltést kapunk.

2. megoldás: Először töltsük ki a négyzeteket tetszőleges különböző valós számokkal, nem figyelve arra, hogy egészek legyenek. A bal szélső négyzetbe írjuk be az 1-et, majd az ezt követő reláció alapján írunk a második négyzetbe egy ennél kisebb vagy nagyobb valós számot. Ezután a második relációs jel alapján írunk a harmadik négyzetbe egy újabb számot, csupán arra figyelve, hogy a relációs jel stimeljen és ne egy korábban használt számot írjunk be. Ezt megtehetjük, mert bármely két valós szám között végtelen sok valós szám van, ezek közül tetszőlegesen tudunk választani egy megfelelőt. Miután kitöltöttük a 2026 négyzetet, a relációs jelek mind teljesülnek. Végül minden négyzetbe írjuk bele, hogy az odaírt valós szám a használt 2026 valós szám közül hányadik legkisebb. Mivel különbözőek a beírt számok, ezért így 1-től 2026-ig írjuk be a számokat a sorrendjük szerint. Továbbá a relációk is mind teljesülnek, hiszen a valós számokra teljesültek és a számok egymáshoz viszonyított sorrendje a két esetben azonos. Ezzel megadtunk egy kitöltést, akárhogyan is írtuk a relációs jeleket.

3. megoldás: Bizonyítsunk teljes indukcióval tetszőleges számú négyzet esetére! Ha csak egy négyzet lenne, akkor ebbe beírjuk az 1-et és készen vagyunk, mivel nincsen egy relációs jel sem. Ha kettő négyzet van a sorban, akkor a köztük lévő relációs jelnek megfelelően be tudjuk írni az 1-et és a 2-t úgy, hogy az teljesüljön. Most tegyük fel, hogy k darab négyzet esetén már beláttuk az állítást, azaz ekkor be tudjuk írni az $1, 2, \dots, k$ számokat megfelelően k egymás melletti négyzetbe. Most megmutatjuk, hogy ekkor $k + 1$ négyzet esetén is ki tudjuk tölteni a négyzeteket. Ha az első négyzet nagyobb, mint a második, akkor beleírjuk $k + 1$ -et az első négyzetbe. Ekkor a maradék k darab négyzetbe az $1, 2, \dots, k$ számokat kell beírunk, amit megtehetünk a feltevésünk szerint a relációs jelek teljesülésével. Ha pedig az első négyzet kisebb, mint a második, akkor beleírjuk az 1-et az első négyzetbe. Így a maradék k darab négyzetbe a $2, 3, \dots, k, k + 1$ számokat kell beírunk, amit szintén megtehetünk a feltevésünk szerint a relációs jelek teljesülésével, hiszen beírjuk az $1, 2, \dots, k - 1, k$ számokat megfelelően és mindegyikhez hozzáadunk 1-et. Ezzel beláttuk az állítást teljes indukcióval: 2026 négyzet is kitölthető a relációs jeleknek megfelelően. (Megjegyzés: ez a megoldás ugyanazt a kitöltést adja, mint az első.)

C3. Merlinnek van sok üres doboza egymás mellett. Arthur beletesz az első dobozba valahány kavicsot, majd megad egy 1-nél nagyobb k egész számot. Ezután Merlin a második dobozba annyi kavicsot tesz, amennyi az első dobozban lévő



kavicsok számának k -szorosa. Merlin ezt ismételve minden dobozba az eggyel korábbi dobozban lévő kavicsok számának k -szorosát teszi. Ha a bekerülő kavicsok számának nem lenne közös számjegye az előző dobozban lévőké számával, akkor azt már nem teszi bele és abbahagyja a kavicspakolást. Ha valamelyik dobozba 1000-nél több kavics kerülne, akkor azt már nem teszi bele és szintén abbahagyja. Végül Merlin annyi aranyat ad Arthurnak, ahány dobozban van kavics. Legfeljebb hány aranyat szerezhet Arthur?

Például, ha Arthur az első dobozba 23 kavicsot tesz és a 4-es számot adja meg, akkor a második dobozba 92 darab kerül, mert a 23-nak és a 92-nak van közös számjegye. Viszont a harmadikba egy sem kerül, mert a $92 \cdot 4 = 368$ -nak nincs közös számjegye a 92-vel. Ebben az esetben tehát Arthur kettő aranyat szerez.

Jánosik Áron feladata

1. megoldás: Arthur legfeljebb 7 aranyat szerezhet. Erre egy jó példa, ha az első dobozba 10 aranyat tesz, és k értékét 2-nek választja. Ekkor a dobozokba rendre 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 kerül, a nyolcadikba pedig meg már a $2 \cdot 640 = 1280 > 1000$ nem kerül be.

Bebizonyítjuk, hogy 7-nél több aranyat nem tud szerezni. Tegyük fel, hogy mégis tud, és még a nyolcadik dobozba is kerül kavics. Jelölje a az első dobozba rakott kavicsok számát. Ekkor a nyolcadik dobozba ak^7 kavics kerül, amiről tudjuk, hogy legfeljebb 1000. Ekkor az nem lehetséges, hogy $k > 2$, mert ekkor $ak^7 \geq 3^7 > 1000$ lenne. Így $k = 2$, és a nyolcadik dobozba $128a$ kavics került. Itt $128a \leq 1000$, így $a \leq 7$. Viszont bármely pozitív egyjegyű számot 2-vel megszorozva olyan számot kapunk, ami nem rendelkezik közös jeggyel az eredeti egyjegyű számmal, így már a második dobozba sem kerülnének kavicsok, ez ellentmondás. Így a bizonyítással készen vagyunk, valóban 7 arany a maximum.

2. megoldás: Vezessünk be egy p ismeretlent, ami az Arthur által az első dobozba rakott kavicsok számát jelölje. Tudjuk, hogy Arthur által megadott k egész számra a következő feltétel teljesül: $k \geq 2$. Jelöljük el Merlin dobozainak számát n -nel, ekkor Merlin utolsó dobozában a kavicsok száma: $p \cdot k^{n-1}$. Erre a feladat szövege szerint a következő feltételnek kell teljesülnie: $p \cdot k^{n-1} \leq 1000$. p minimális értéke esetén ($p = 1$) vizsgáljuk meg kis k értékekre milyen határfeltételt szab meg az összefüggésünk n értékére: Ha $k = 2 \rightarrow n \leq 10$, ha $k = 3 \rightarrow n \leq 7$, ha $k = 4 \rightarrow n \leq 5$. Megfigyelhető, hogy k értékének növelésével n feltétele csökken. Mivel azt szeretnénk elérni, hogy minél több doboza legyen Merlinnek, ezért vizsgáljuk meg, hogy tudunk-e $k = 2$ esetén legalább 7 dobozba kavicsot helyezni. Ahhoz, hogy az egymást követő dobozokban lévő kavicsok számának legyen közös számjegye, a legegyszerűbb, ha az első dobozban a kavicsok száma 0-ra végződik, így az összes többi dobozban is a kavicsok számának utolsó számjegye 0 lesz. Mivel azt szeretnénk, hogy minél több dobozba kerüljön kavics, így optimális esetben 10 kavicsot rak Arthur az első dobozba. Ekkor 7 dobozba kerülhet kavics (utolsó dobozba 640 kavics kerül), ahhoz hogy egyik dobozban lévő kavicsok száma se haladja meg az 1000-t. Tudtunk 7 dobozra konstrukciót mutatni, így $k > 2$ -vel már nem kell foglalkozni. Kérdés már csak az, hogy lehet-e 8 dobozba kavicsokat rakni. Ehhez az kell, hogy az első dobozba helyezett kavicsok számát csökkentsük. Ekkor egyjegyű lesz az első dobozba helyezett kavicsok száma, azonban nincs olyan egyjegyű szám, amelynek lenne azonos jegye a kétszeresével a 0 kivételével, de 0 kavicsot nem helyezhetek az első dobozba. Tehát Arthur legfeljebb 7 aranyat szerezhet.

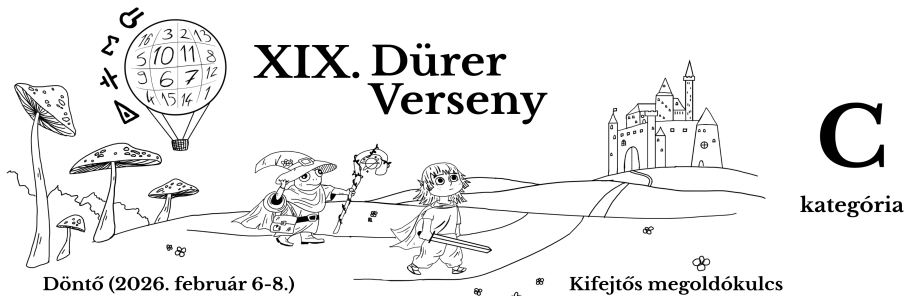
C4. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $\angle BCD = 150^\circ$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E , továbbá a BC oldal felezőpontja F . Legyen az E -ből AB -re állított merőleges AB -vel vett metszéspontja G , az AB oldal felezőpontja pedig H .

a) Mekkora az EH szakasz hossza?

b) Mekkora az FG szakasz hossza?

Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Mivel E az átlók metszéspontja, ezért E felezi az AC szakaszt. Tudjuk továbbá, hogy F felezi BC -t, így EF középvonal ABC -ben. Tudjuk továbbá, hogy EG merőleges AB -re, ezért EF -re is. Vagyis EGF egy derékszögű háromszög, amelyben az E -nél van a derékszög. A feladat (b) része, hogy mekkora a GF szakasz hossza. Ezt Pitagorasz-tétel segítségével fogjuk kiszámolni, amihez először



az EF , majd az EG befogó hosszát számoljuk ki. Az utóbbihoz az EH szakasz hosszát is kiszámoljuk, ami a feladat (a) kérdése.

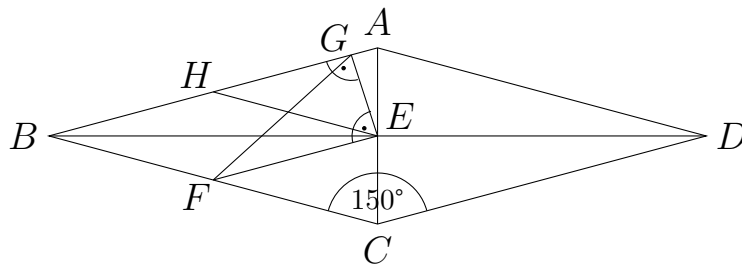
Láttuk már, hogy EF középvonal ABC -ben, vagyis $\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2}$. Viszont AB a rombusz egy oldala, vagyis $AB = 1$, amiből azt kapjuk, hogy $EF = \frac{1}{2}$.

Ezután rátérünk EG kiszámolására, amihez először az EH szakasz hosszát számoljuk ki.

a) Mivel $ABCD$ egy rombusz, ezért az átlói merőlegesen egymásra, vagyis $\angle AED = 90^\circ$. Ebből következik, hogy E rajta van AB Thalész-körén, vagyis $HE = HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$. Ezzel a feladat első részével meg is vagyunk.

b) Ezután folytassuk a megoldást, EG kiszámolásával. Tudjuk, hogy $\angle BCD = 150^\circ$, amiből következik, hogy $\angle ABC = \angle HBC = 30^\circ$. Viszont azt is tudjuk, hogy egy rombuszban az átló felezi a csúcsnál lévő szöget, ami esetünkben azt jelenti, hogy az EB egyenes felezi az $\angle ABC$ szöget. Vagyis $\angle ABE = \angle HBE = 15^\circ$. Láttuk viszont már, hogy $HB = HE$, vagyis BEH egy egyenlőszárú háromszög, amiből $\angle BEH = 15^\circ$. Ebből ki tudjuk számolni a $\angle GHE$ nagyságát, hiszen ez a BEH háromszög H -beli külső szöge, így $\angle GHE = \angle HBE + \angle BEH = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$. Tudjuk továbbá, hogy EG merőleges AB -re, azaz $\angle EGH = 90^\circ$, ami azt jelenti, hogy EGH egy szabályos háromszög fele (úgynevezett félszabályos háromszög), vagyis $EG = \frac{HE}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

Végül csak az maradt hátra, hogy a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk az EGF háromszögre: $EG^2 + EF^2 = FG^2$, amibe behelyettesítve $FG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ hobbitláb.



C5. Felírtunk a táblára három darab 1-es számot. Egy lépésben kiválasztunk két számot, majd az egyiket letöröljük, és helyére a két kiválasztott szám összegét vagy különbségét írjuk. Tehát ha az a és b számokat választottuk ki, akkor a -t vagy b -t letöröljük, a helyére pedig $a + b$ vagy $|a - b|$ kerül. Ilyen lépéseket végezve:

- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám az 53, 2026, 2036 legyen?
- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 0, 0, 0 legyen?
- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 42, 91, 112 legyen?

Halasi Gergő és Török Eszter feladata

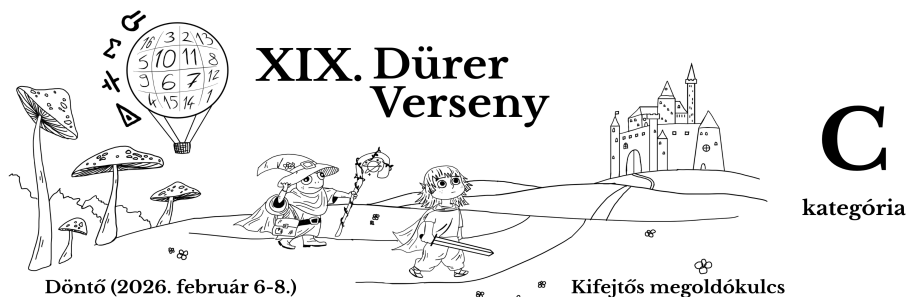
Megoldás: A megengedett lépések így is megfogalmazhatók:

- amikor a és b helyére $a + b$ és b kerül, akkor a -hoz hozzáadtuk b -t,
- amikor a és b helyére $|a - b|$ és b kerül, akkor a -ból kivontuk b -t (melyet a feladat szövege szerint úgy kell érteni, hogy ha negatív lesz az eredmény, akkor annak az abszolútértékét vesszük).

Vegyük észre, hogy amíg van a táblán legalább egy darab 1-es, addig a másik két számhoz akárhányszor hozzáadhatunk 1-et. Így a kezdőállapotból indulva és egy 1-est megtartva a másik két szám értékét tetszőleges természetes számokra beállíthatjuk.

a) Igen, elérhető. Megadunk egy lehetséges lépéssorozatot:

- A fent említett módszerrel először elérjük, hogy a táblán az 1, 3, 2026 számok szerepeljenek.



C
kategória

- Az 1-eshez hozzáadjuk 3-szor a 3-ast, így az 1-es helyett 10-est kapunk.
- A 3-ashoz hozzáadjuk 5-ször a 10-est, így a 3-as helyett 53-ast kapunk.
- Végül a 10-hez hozzáadjuk a 2026-ot, így megkapjuk a 2036-ot.

Ezzel tehát megkaptuk a kívánt három számot a táblán.

b) Nem lehetséges. Gondolkodjunk visszafelé. Egy lépésben a táblán lévő számok közül maximum egy darab változhat meg. Tehát, ahhoz, hogy mindhárom szám 0 legyen, az utolsó lépés előtt vagy három 0-nak kellett lennie a táblán, vagy két 0-nak és egy 0-tól különböző számnak.

- Abban az esetben, ha a táblán három 0 volt az utolsó lépés előtt, akkor az utolsó lépésben semmi sem történt a számokkal, így haladjunk egy újabb lépést visszafelé, a gondolatmenetet megismételve.
- Abban az esetben, ha két 0 és egy 0-tól különböző szám volt a táblán az utolsó lépés előtt, akkor ezekből egy lépéssel kellett elérnünk a csupa 0 helyzetet. Ehhez a 0-tól különböző számnak a műveletben részt vevő két szám között kellett lennie. A másik szám egy 0 volt, azonban egy nemnulla számhoz 0-t hozzáadva vagy kivonva a szám nem változik meg, ez ellentmondás.

Így az valóban nem érhető el a kezdőállapotból, hogy három 0 legyen a táblán.

c) Vegyük észre, hogy a 42, a 91 és a 112 mind oszthatók 7-tel, a kiinduló állapotban viszont egyik szám sem. Itt is gondolkodjunk visszafelé. Ahhoz, hogy három 7-tel osztható számot kapjunk, az utolsó lépés előtt vagy szintén három darab 7-tel osztható számunk volt, vagy pedig két 7-tel osztható és egy 7-tel nem osztható.

- Abban az esetben, ha a táblán három 7-tel osztható szám volt az utolsó lépés előtt, akkor ugyanabban a szituációban vagyunk, mint a folyamat végén, és a kezdőállapotot nem értük el (mert abban 7-tel nem osztható számok vannak). Haladjunk egy újabb lépést visszafelé, a gondolatmenetet megismételve.
- Abban az esetben, ha két 7-tel osztható szám és egy 7-tel nem osztható szám volt a táblán az utolsó lépés előtt, akkor ezekből egy lépéssel el kellett tudnunk érni a csupa 7-tel osztható helyzetet. Ehhez a 7-tel nem osztható számnak a műveletben részt vevő két szám között kellett lennie, a másik szám pedig egy 7-tel osztható volt. Ám egy 7-tel nem osztható számhoz hozzáadva vagy abból kivonva egy 7-tel osztható számot, a kapott szám 7-tel továbbra sem lesz osztható, ez ellentmondás.

Így valóban nem lehet elérni a kezdőállapotból azt sem, hogy a táblán lévő három szám a 42, 91 és 112 legyen.

Érdekeség: Az euklideszi algoritmus használatával bármilyen olyan számhármast elérhetők a megadott lépésekkel, melyben a három szám legnagyobb közös osztója megegyezik a kiinduló három szám legnagyobb közös osztójával.

C6. Játék: A játékvezető szétoszt 3 mezőre összesen legfeljebb 20, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Vegyük észre, hogy minden lépés után páros sok korong marad a pályán. Ezért a mezőkön lévő korongok számának paritása kétféle lehet:



-
- (a) vagy minden mezőn páros számú korong van,
(b) vagy egy mezőn páros és két mezőn páratlan számú korong van.

Azt állítjuk, hogy a soron következő játékos akkor tud nyerni, ha éppen (b) típusú állapotban vagyunk. Ugyanis ekkor a két páratlan mezőről egy-egy korongot elvéve mindhárom mezőn páros sok korong marad, így az (a) típusú állapotba kerülünk. Ekkor az ellenfelünk vagy veszített (mert minden korong elfogyott a pályáról, vagy csak egy kupacban maradt korong és a másik kettő elfogyott), vagy pedig két mezőről egy-egy korongot elvéve, egy páros és két páratlan mezőt hagy nekünk, így újra visszakapunk egy (b) típusú állapotot.

Így ha a kezdőállás (a) típusú, akkor másodikként, ha (b) típusú, akkor pedig kezdőként érdemes játszani, és minden lépésben (a) típusú – azaz csupa páros – állapotot hagyunk az ellenfélnek.