



D
kategória

1. Merlinnek van sok üres doboza egymás mellett. Arthur beletesz az első dobozba valahány kavicsot, majd megad egy 1-nél nagyobb k egész számot. Ezután Merlin a második dobozba annyi kavicsot tesz, amennyi az első dobozban lévő kavicsok számának k -szorososa. Merlin ezt ismételve minden dobozba az eggyel korábbi dobozban lévő kavicsok számának k -szorosát teszi. Ha a bekerülő kavicsok számának nem lenne közös számjegye az előző dobozban lévők számával, akkor azt már nem teszi bele és abbahagyja a kavicspakolást. Ha valamelyik dobozba 1000-nél több kavics kerülne, akkor azt már nem teszi bele és szintén abbahagyja. Végül Merlin annyi aranyat ad Arthurnak, ahány dobozban van kavics. Legfeljebb hány aranyat szerezhet Arthur?

Például, ha Arthur az első dobozba 23 kavicsot tesz és a 4-es számot adja meg, akkor a második dobozba 92 darab kerül, mert a 23-nak és a 92-nak van közös számjegye. Viszont a harmadikba egy sem kerül, mert a $92 \cdot 4 = 368$ -nak nincs közös számjegye a 92-vel. Ebben az esetben tehát Arthur kettő aranyat szerez.

2. Felírtunk a táblára három darab 1-es számot. Egy lépésben kiválasztunk két számot, majd az egyiket letöröljük, és helyére a két kiválasztott szám összegét vagy különbségét írjuk. Tehát ha az a és b számokat választottuk ki, akkor a -t vagy b -t letöröljük, a helyére pedig $a + b$ vagy $|a - b|$ kerül. Ilyen lépéseket végezve:

- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám az 53, 2026, 2036 legyen?
- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 0, 0, 0 legyen?
- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 42, 91, 112 legyen?

3. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege

- pontosan 2,
- pontosan 2028,
- pontosan 2029.

4. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $\angle BCD = 150^\circ$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E , továbbá a BC oldal felezőpontja F . Legyen az E -ből AB -re állított merőleges AB -vel vett metszéspontja G , az AB oldal felezőpontja pedig H .

- Mekkora az EH szakasz hossza?
- Mekkora az FG szakasz hossza?

5. Legyen $a_0, a_1, a_2, \dots$ nemnegatív egész számok egy végtelen hosszú sorozata. Tudjuk, hogy $a_0 = 0$, és létezik olyan k , hogy $a_k \neq k$. Továbbá minden n, m nemnegatív egészre teljesül, hogy $|a_n - a_m|$ osztja $|n - m|$ -et, vagy pedig $a_n = a_m$. Mi a lehető legnagyobb szám, ami szerepelhet egy ilyen sorozatban? Ha minden M egész számra létezik olyan sorozat, amelyben szerepel M -nél nagyobb szám, akkor a válasz végtelen.

6. **Játék:** A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodsomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!