

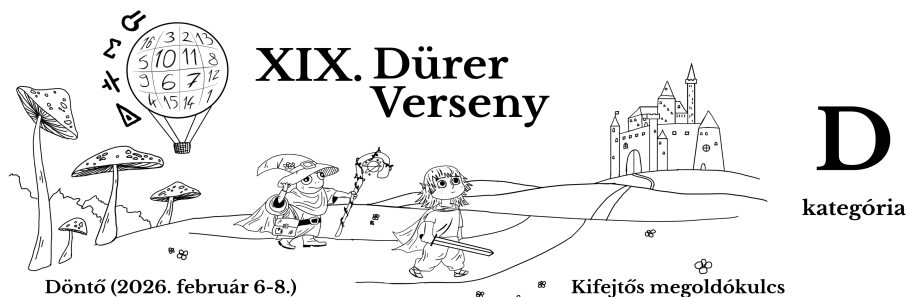
D1. Merlinnek van sok üres doboza egymás mellett. Arthur beletesz az első dobozba valahány kavicsot, majd megad egy 1-nél nagyobb k egész számot. Ezután Merlin a második dobozba annyi kavicsot tesz, amennyi az első dobozban lévő kavicsok számának k -szorososa. Merlin ezt ismételve minden dobozba az eggyel korábbi dobozban lévő kavicsok számának k -szorosát teszi. Ha a bekerülő kavicsok számának nem lenne közös számjegye az előző dobozban lévőké számával, akkor azt már nem teszi bele és abbahagyja a kavicspakolgatást. Ha valamelyik dobozba 1000-nél több kavics kerülne, akkor azt már nem teszi bele és szintén abbahagyja. Végül Merlin annyi aranyat ad Arthurnak, ahány dobozban van kavics. Legfeljebb hány aranyat szerezhet Arthur?

Például, ha Arthur az első dobozba 23 kavicsot tesz és a 4-es számot adja meg, akkor a második dobozba 92 darab kerül, mert a 23-nak és a 92-nak van közös számjegye. Viszont a harmadikba egy sem kerül, mert a $92 \cdot 4 = 368$ -nak nincs közös számjegye a 92-vel. Ebben az esetben tehát Arthur kettő aranyat szerez.
Jánosik Áron feladata

1. megoldás: Arthur legfeljebb 7 aranyat szerezhet. Erre egy jó példa, ha az első dobozba 10 aranyat tesz, és k értékét 2-nek választja. Ekkor a dobozokba rendre 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 kerül, a nyolcadikba pedig meg már a $2 \cdot 640 = 1280 > 1000$ nem kerül be.

Bebizonyítjuk, hogy 7-nél több aranyat nem tud szerezni. Tegyük fel, hogy mégis tud, és még a nyolcadik dobozba is kerül kavics. Jelölje a az első dobozba rakott kavicsok számát. Ekkor a nyolcadik dobozba ak^7 kavics kerül, amiről tudjuk, hogy legfeljebb 1000. Ekkor az nem lehetséges, hogy $k > 2$, mert ekkor $ak^7 \geq 3^7 > 1000$ lenne. Így $k = 2$, és a nyolcadik dobozba $128a$ kavics került. Itt $128a \leq 1000$, így $a \leq 7$. Viszont bármely pozitív egyjegyű számot 2-vel megszorozva olyan számot kapunk, ami nem rendelkezik közös jeggyel az eredeti egyjegyű számmal, így már a második dobozba sem kerülnének kavicsok, ez ellentmondás. Így a bizonyítással készen vagyunk, valóban 7 arany a maximum.

2. megoldás: Vezessünk be egy p ismeretlent, ami az Arthur által az első dobozba rakott kavicsok számát jelölje. Tudjuk, hogy Arthur által megadott k egész számra a következő feltétel teljesül: $k \geq 2$. Jelöljük el Merlin dobozainak számát n -nel, ekkor Merlin utolsó dobozában a kavicsok száma: $p \cdot k^{n-1}$. Erre a feladat szövege szerint a következő feltételnek kell teljesülnie: $p \cdot k^{n-1} \leq 1000$. p minimális értéke esetén ($p = 1$) vizsgáljuk meg kis k értékekre milyen határfeltételt szab meg az összefüggésünk n értékére: Ha $k = 2 \rightarrow n \leq 10$, ha $k = 3 \rightarrow n \leq 7$, ha $k = 4 \rightarrow n \leq 5$. Megfigyelhető, hogy k értékének növelésével n feltétele csökken. Mivel azt szeretnénk elérni, hogy minél több doboza legyen Merlinnek, ezért vizsgáljuk meg, hogy tudunk-e $k = 2$ esetén legalább 7 dobozba kavicsot helyezni. Ahhoz, hogy az egymást követő dobozokban lévő kavicsok számának legyen közös számjegye, a legegyszerűbb, ha az első dobozban a kavicsok száma 0-ra végződik, így az összes többi dobozban is a kavicsok számának utolsó számjegye 0 lesz. Mivel azt szeretnénk, hogy minél több dobozba kerüljön kavics, így optimális esetben 10 kavicsot rak Arthur az első dobozba. Ekkor 7 dobozba kerülhet kavics (utolsó dobozba 640 kavics kerül), ahhoz hogy egyik dobozban lévő kavicsok száma se haladja meg az 1000-t. Tudtunk 7 dobozra konstrukciót mutatni, így $k > 2$ -vel már nem kell foglalkozni. Kérdés már csak az, hogy lehet-e 8 dobozba kavicsokat rakni. Ehhez az kell, hogy az első dobozba helyezett kavicsok számát csökkentsük. Ekkor egyjegyű lesz az első dobozba helyezett kavicsok száma, azonban nincs olyan egyjegyű szám, amelynek lenne azonos jegye a kétszeresével a 0 kivételével, de 0 kavicsot nem helyezhetek az első dobozba. Tehát Arthur legfeljebb 7 aranyat szerezhet.



D
kategória

D2. Felírtunk a táblára három darab 1-es számot. Egy lépésben kiválasztunk két számot, majd az egyiket letöröljük, és helyére a két kiválasztott szám összegét vagy különbségét írjuk. Tehát ha az a és b számokat választottuk ki, akkor a -t vagy b -t letöröljük, a helyére pedig $a + b$ vagy $|a - b|$ kerül. Ilyen lépéseket végezve:

- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám az 53, 2026, 2036 legyen?
- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 0, 0, 0 legyen?
- Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 42, 91, 112 legyen?

Halasi Gergő és Török Eszter feladata

Megoldás: A megengedett lépések így is megfogalmazhatók:

- amikor a és b helyére $a + b$ és b kerül, akkor a -hoz hozzáadtuk b -t,
- amikor a és b helyére $|a - b|$ és b kerül, akkor a -ból kivontuk b -t (melyet a feladat szövege szerint úgy kell érteni, hogy ha negatív lesz az eredmény, akkor annak az abszolútértékét vesszük).

Vegyük észre, hogy amíg van a táblán legalább egy darab 1-es, addig a másik két számhoz akárhányszor hozzáadhatunk 1-et. Így a kezdőállapotból indulva és egy 1-est megtartva a másik két szám értékét tetszőleges természetes számokra beállíthatjuk.

a) Igen, elérhető. Megadunk egy lehetséges lépéssorozatot:

- A fent említett módszerrel először elérjük, hogy a táblán az 1, 3, 2026 számok szerepeljenek.
- Az 1-eshez hozzáadjuk 3-szor a 3-ast, így az 1-es helyett 10-est kapunk.
- A 3-ashoz hozzáadjuk 5-ször a 10-est, így a 3-as helyett 53-ast kapunk.
- Végül a 10-hez hozzáadjuk a 2026-ot, így megkapjuk a 2036-ot.

Ezzel tehát megkaptuk a kívánt három számot a táblán.

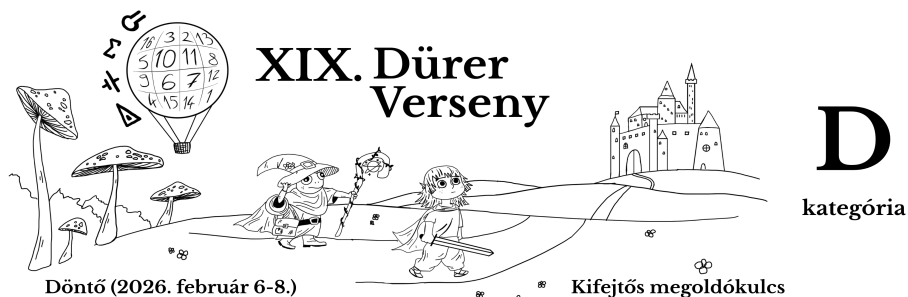
b) Nem lehetséges. Gondolkodjunk visszafelé. Egy lépésben a táblán lévő számok közül maximum egy darab változhat meg. Tehát, ahhoz, hogy mindhárom szám 0 legyen, az utolsó lépés előtt vagy három 0-nak kellett lennie a táblán, vagy két 0-nak és egy 0-tól különböző számnak.

- Abban az esetben, ha a táblán három 0 volt az utolsó lépés előtt, akkor az utolsó lépésben semmi sem történt a számokkal, így haladjunk egy újabb lépést visszafelé, a gondolatmenetet megismételve.
- Abban az esetben, ha két 0 és egy 0-tól különböző szám volt a táblán az utolsó lépés előtt, akkor ezekből egy lépéssel kellett elérnünk a csupa 0 helyzetet. Ehhez a 0-tól különböző számnak a műveletben részt vevő két szám között kellett lennie. A másik szám egy 0 volt, azonban egy nemnulla számhoz 0-t hozzáadva vagy kivonva a szám nem változik meg, ez ellentmondás.

Így az valóban nem érhető el a kezdőállapotból, hogy három 0 legyen a táblán.

c) Vegyük észre, hogy a 42, a 91 és a 112 mind oszthatók 7-tel, a kiinduló állapotban viszont egyik szám sem. Itt is gondolkodjunk visszafelé. Ahhoz, hogy három 7-tel osztható számot kapjunk, az utolsó lépés előtt vagy szintén három darab 7-tel osztható számunk volt, vagy pedig két 7-tel osztható és egy 7-tel nem osztható.

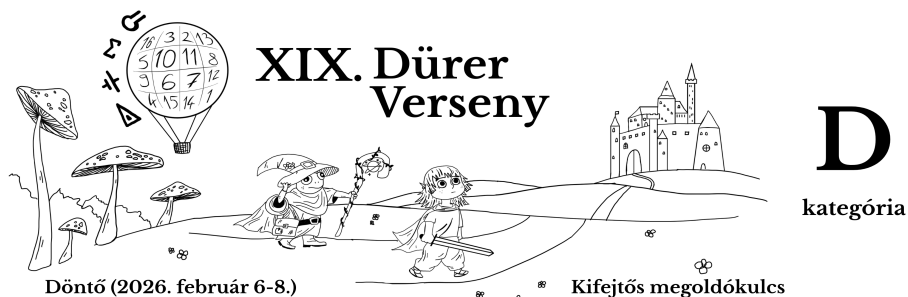
- Abban az esetben, ha a táblán három 7-tel osztható szám volt az utolsó lépés előtt, akkor ugyanabban a szituációban vagyunk, mint a folyamat végén, és a kezdőállapotot nem értük el (mert abban 7-tel nem osztható számok vannak). Haladjunk egy újabb lépést visszafelé, a gondolatmenetet megismételve.



- Abban az esetben, ha két 7-tel osztható szám és egy 7-tel nem osztható szám volt a táblán az utolsó lépés előtt, akkor ezekből egy lépéssel el kellett tudnunk érni a csupa 7-tel osztható helyzetet. Ehhez a 7-tel nem osztható számnak a műveletben részt vevő két szám között kellett lennie, a másik szám pedig egy 7-tel osztható volt. Ám egy 7-tel nem osztható számhoz hozzáadva vagy abból kivonva egy 7-tel osztható számot, a kapott szám 7-tel továbbra sem lesz osztható, ez ellentmondás.

Így valóban nem lehet elérni a kezdőállapotból azt sem, hogy a táblán lévő három szám a 42, 91 és 112 legyen.

Érdekesség: Az euklideszi algoritmus használatával bármilyen olyan számhármast elérhető a megadott lépésekkel, melyben a három szám legnagyobb közös osztója megegyezik a kiinduló három szám legnagyobb közös osztójával.



D
kategória

D3. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege

- a) pontosan 2,
- b) pontosan 2028,
- c) pontosan 2029.

Hegedűs Dani feladata

Megoldás:

1. megoldás:

a) Olyan számot, aminek a számjegyeinek összege 2, úgy kaphatunk, ha összeadunk az 1, 10, 100, 1000, ... számok közül kettőt. Az 1 héttel osztva 1 maradékot ad, a 10 héttel osztva három maradékot ad. Írásbeli osztással kiszámolható, hogy $100 = 14 \times 7 + 2$ és $1000 = 142 \times 7 + 6$, azaz a 100 kettő, az 1000 pedig hat maradékot ad héttel osztva. Így $1000 + 1$ osztható lesz héttel és ennek számjegyösszege 2. Valóban, $1001 : 7 = 143$.

b) Ha egy héttel osztható számot megszorozunk egy pozitív egésszel, akkor továbbra is héttel osztható marad, illetve héttel osztható számok összege is héttel osztható. Így például héttel osztható $10010000 = 1001 \times 1000$ és emiatt $10010000 + 1001 = 10011001$ is az. Folytatva a gondolatmenetet, ha egymás mögé írjuk a héttel osztható 1001-et 1014-szer, akkor is héttel osztható számot kapunk, aminek a számjegyösszege 2028 lesz, hiszen ennyi 1-es jegye van. (Hasonlóan elérhető tetszőleges páros számjegyösszegű héttel osztható szám ezzel a módszerrel.)

c) Az előző rész mintájára tudunk készíteni olyan héttel osztható számot, amiben a számjegyek összege 2026, mégpedig 1013 darab egymás után írt 1001-es segítségével. Adjunk ehhez a számhoz 21-et, ami szintén osztható héttel. A kapott héttel osztható szám így 10011001 helyett 10011022-re végződik, így 3-mal nőtt a számjegyek összege. A kapott szám egy héttel osztható, 2029 számjegyösszegű szám. (Hasonlóan elérhető tetszőleges egynél nagyobb páratlan számjegyösszegű héttel osztható szám.)

2. megoldás:

Minden $n > 1$ egész számhoz mutatunk egy ilyen többszöröst az alábbi módon: ha n -et 7-tel maradékosan osztjuk, akkor megkapjuk egy felírását $n = a \cdot 7 + b$ alakban, ahol a, b természetes számok. Először $n \leq 8$ esetén keresünk megfelelő számokat, az alábbiak például megfelelőek:

- $n = 2$ -re az 1001,
- $n = 3$ -ra a 21,
- $n = 4$ -re a 112,
- $n = 5$ -re a 14,
- $n = 6$ -ra a 42,
- $n = 7$ -re a 7,
- $n = 8$ -ra a 35.

Általános esetben pedig egy $a+4$ -jegyű számot adunk meg, amelynek $b > 1$ esetén első a , egyébként első $a - 1$ jegye 7-es, az utolsó négy jegy pedig a megfelelő hetes maradékhoz tartozó szám a fenti hét esetből, esetlegesen az elején 0-kkal kiegészítve, ha nem szükséges mind a négy számjegy használata. Például $n = 18 = 2 \cdot 7 + 4$ esetén a megadott számunk a 770112, hiszen $n = 4$ -re 112 a számunk, ezt két 7-essel kell kiegészítenünk és egy 0-val, mivel a 112 csupán háromjegyű. Az így kapott számnak épp n lesz a számjegyeinek összege, és 7-tel is osztható, hiszen az utolsó 4 jegy egy 7-tel osztható számot alkot, és ehhez csak 700...0 alakú, szintén 7-tel osztható számokat kell hozzáadnunk, hogy a teljes számot megkapjuk. Ezzel a módszerrel tehát tetszőleges számjegyösszegre meg tudunk adni megfelelő héttel osztható számot. (2 számjegyösszegre az 1001, 2028 számjegyösszegre 77...70014 és 2029 számjegyösszegre 77...70042 lesz a példa.)



D
kategória

D4. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $BCD\angle = 150^\circ$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E , továbbá a BC oldal felezőpontja F . Legyen az E -ből AB -re állított merőleges AB -vel vett metszéspontja G , az AB oldal felezőpontja pedig H .

a) Mekkora az EH szakasz hossza?

b) Mekkora az FG szakasz hossza?

Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Mivel E az átlók metszéspontja, ezért E felezi az AC szakaszt. Tudjuk továbbá, hogy F felezi BC -t, így EF középvonal ABC -ben. Tudjuk továbbá, hogy EG merőleges AB -re, ezért EF -re is. Vagyis EGF egy derékszögű háromszög, amelyben az E -nél van a derékszög. A feladat (b) része, hogy mekkora a GF szakasz hossza. Ezt Pitagorasz-tétel segítségével fogjuk kiszámolni, amihez először az EF , majd az EG befogó hosszát számoljuk ki. Az utóbbihoz az EH szakasz hosszát is kiszámoljuk, ami a feladat (a) kérdése.

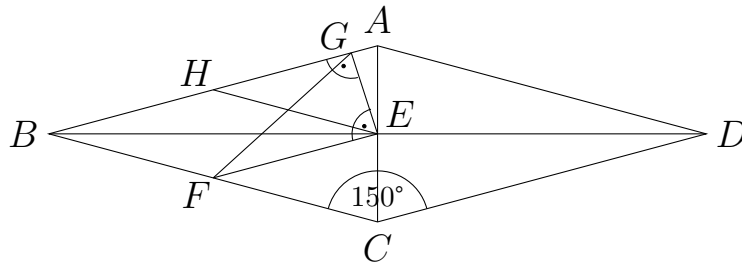
Láttuk már, hogy EF középvonal ABC -ben, vagyis $\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2}$. Viszont AB a rombusz egy oldala, vagyis $AB = 1$, amiből azt kapjuk, hogy $EF = \frac{1}{2}$.

Ezután rátérünk EG kiszámolására, amihez először az EH szakasz hosszát számoljuk ki.

a) Mivel $ABCD$ egy rombusz, ezért az átlói merőlegesen egymásra, vagyis $AED\angle = 90^\circ$. Ebből következik, hogy E rajta van AB Thalész-körén, vagyis $HE = HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$. Ezzel a feladat első részével meg is vagyunk.

b) Ezután folytassuk a megoldást, EG kiszámolásával. Tudjuk, hogy $BCD\angle = 150^\circ$, amiből következik, hogy $ABC\angle = HBC\angle = 30^\circ$. Viszont azt is tudjuk, hogy egy rombuszban az átló felezi a csúcsnál lévő szöget, ami esetünkben azt jelenti, hogy az EB egyenes felezi az ABC szöget. Vagyis $ABE\angle = HBE\angle = 15^\circ$. Láttuk viszont már, hogy $HB = HE$, vagyis BEH egy egyenlőszárú háromszög, amiből $BEH\angle = 15^\circ$. Ebből ki tudjuk számolni a $GHE\angle$ nagyságát, hiszen ez a BEH háromszög H -beli külső szöge, így $GHE\angle = HBE\angle + BEH\angle = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$. Tudjuk továbbá, hogy EG merőleges AB -re, azaz $EGH\angle = 90^\circ$, ami azt jelenti, hogy EGH egy szabályos háromszög fele (úgynevezett *fél szabályos* háromszög), vagyis $EG = \frac{HE}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Végül csak az maradt hátra, hogy a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk az EGF háromszögre: $EG^2 + EF^2 = FG^2$, amibe behelyettesítve $FG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ hobbitláb.





D
kategória

D5. Legyen $a_0, a_1, a_2, \dots$ nemnegatív egész számok egy végtelen hosszú sorozata. Tudjuk, hogy $a_0 = 0$, és létezik olyan k , hogy $a_k \neq k$. Továbbá minden n, m nemnegatív egészre teljesül, hogy $|a_n - a_m|$ osztja $|n - m|$ -et, vagy pedig $a_n = a_m$. Mi a lehető legnagyobb szám, ami szerepelhet egy ilyen sorozatban?

Ha minden M egész számra létezik olyan sorozat, amelyben szerepel M -nél nagyobb szám, akkor a válasz végtelen.
Tarján Berci feladata

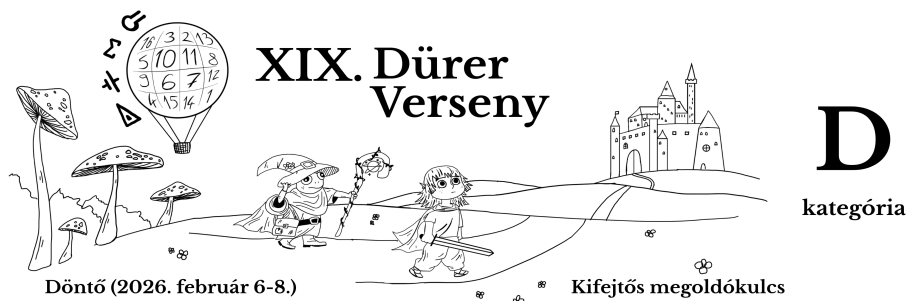
Megoldás:

Megmutatjuk, hogy 3-nál nagyobb szám nem szerepelhet egy ilyen sorozatban. Jelölje a és b pozitív számokra $a \mid b$ azt, hogy a osztja b -t. Először vegyük észre, hogy az $|a_n - a_m| \mid |n - m|$ feltételből $|n - m| = 1$ esetén következik, hogy $a_{n+1} = a_n + 1$ vagy $a_{n+1} = a_n - 1$, illetve $a_n = a_m$ esetén lehet $a_{n+1} = a_n$, azaz a sorozat egy tagja az előző tagtól mindig legfeljebb 1-gyel tér el. Ha minden n -re $a_{n+1} = a_n + 1$ teljesülne, akkor $a_0 = 0$ miatt minden n -re $a_n = n$ lenne, amit a feladat nem enged meg, így biztosan lesz egy olyan i , amire $a_{i+1} = a_i$ vagy $a_{i+1} = a_i - 1$. Belátjuk, hogy bármelyik eset teljesül, a sorozat legnagyobb tagja nem lehet 3-nál nagyobb.

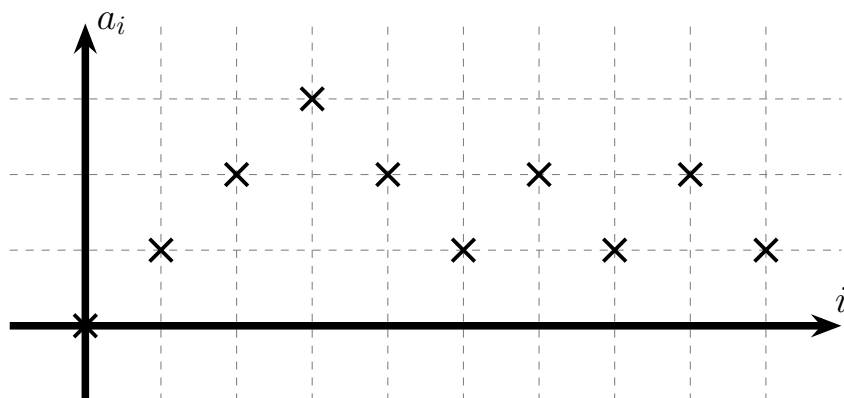
Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $a_{i+1} = a_i$, legyen ez az érték x . Megmutatjuk, hogy ekkor a sorozat minden tagja az $[x - 1, x + 1]$ intervallum egy egész pontja. Legyen $a_j = y$ a sorozat egy tetszőleges tagja, ahol $j \geq i + 2$. Ha $y = x$, akkor valóban az intervallumból való. Tegyük fel, hogy $y \neq x$. Ekkor abból, hogy $|a_j - a_i|$ osztja $|j - i|$ -t, megkapjuk, hogy $|y - x| \mid |j - i|$. Hasonlóan $|a_j - a_{i+1}|$ osztja $|j - (i + 1)|$ -t, azaz $|y - x| \mid |j - i - 1|$. Persze ha egy szám oszt két számot, akkor a különbségüket is, így megkapjuk, hogy $|y - x| \mid |j - i - (j - i - 1)| = 1$, azaz $|y - x|$ osztja 1-et, ami csak úgy lehet, hogy $y - x = 1$ vagy $y - x = -1$, emiatt $x - 1 \leq y \leq x + 1$, vagyis $a_i - 1 \leq a_j \leq a_i + 1$ minden $j \geq i + 2$ esetén. Hasonlóan belátható, hogy $j \leq i - 1$ esetén is fennáll ugyanez az egyenlőtlenség. Ebből persze következik, hogy a sorozat minden tagja az $[x - 1, x + 1]$ intervallum egy egész pontja, és ezek között szerepel a 0, így ebben az esetben nem szerepelhet 2-nél nagyobb szám.

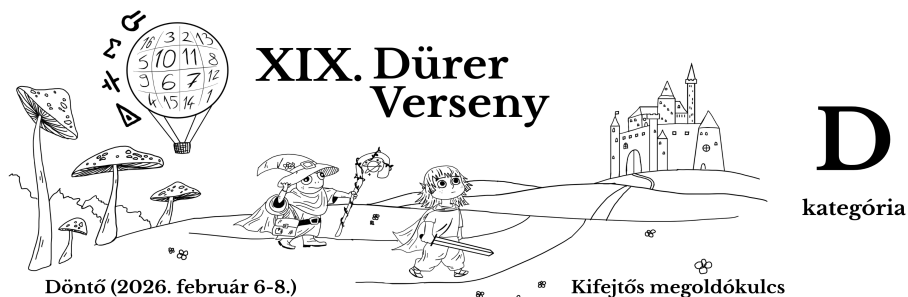
Most nézzük meg azt az esetet, amikor van olyan i , amire $a_{i+1} = a_i - 1$. Tekintsük a legkisebb ilyen i -t. Tudjuk, hogy $i \neq 0$, hiszen különben a_1 negatív lenne. Itt feltehetjük, hogy $a_{k+1} = a_k$ nem teljesül semmilyen k -ra, különben alkalmazhatjuk az előző esetet. Vegyük észre, hogy mivel a_i az első olyan index, amire $a_{i+1} \neq a_i + 1$, ezért $a_{i-1} + 1 = a_i$, így $a_{i+1} = a_{i-1}$. Legyen a_j a sorozat egy tagja, ahol $j \geq i + 2$. Legyen $a_{i-1} = a_{i+1} = x$ és $a_j = y$, és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor $|a_j - a_{i-1}| \mid |j - (i - 1)|$, azaz $|y - x| \mid |j - i + 1|$. Hasonlóan $|a_j - a_{i+1}| \mid |j - (i + 1)|$, azaz $|y - x| \mid |j - i - 1|$. Ebből az előző esethez hasonlóan $|y - x| \mid 2$, ezért $|y - x| \geq 2$, azaz $x - 2 \geq a_j \geq x + 2$ minden $j \geq i + 2$ -ra, és hasonlóan belátható, hogy ugyanez teljesül minden $j \leq i - 2$ -re is. Ebből azt kapjuk, hogy a sorozat minden tagja az $[x - 2, x + 2]$ intervallumban van, és ebben a 0-nak is szerepelnie kell, így minden tag legfeljebb 4. Ez még nem elég, hiszen azt szeretnénk megmutatni, hogy 3-nál nagyobb tag nem lehet. Tegyük fel indirekten, hogy létezik egy ilyen sorozat, amiben valamilyen i -re $a_i = 4$. Ekkor $a_{i-1} = a_{i+1} = 3$, mert egyik sem lehet 4-nél nagyobb, és feltettük, hogy semelyik két szomszédos tag nem egyenlő. Ekkor $|a_{i-1} - a_0| \mid |i - 1|$ és $|a_{i+1} - a_0| \mid |i + 1|$, ezért $3 \mid 2$, ami persze nem teljesül, ezért az indirekt feltevésünk helytelen volt, azaz nem lehet 3-nál nagyobb tag a sorozatban.

Már csak mutatnunk kell egy olyan sorozatot, aminek a legnagyobb tagja 3. Legyen a sorozatunk a következő: $a_i = i$ legyen $i = 0, \dots, 3$ esetén. Ezt követően legyenek a sorozat tagjai felváltva 2 és 3, azaz ha $j > 3$, akkor $a_j = 2$, ha j páros és $a_j = 3$, ha j páratlan. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat kielégíti a feladat feltételeit. Nyilván $k > 3$ esetén $a_k \neq k$. Még meg kell vizsgálnunk, hogy ha $a_i \neq a_j$, akkor $|a_i - a_j| \mid |i - j|$. Ezt $|a_i - a_j| = 1$ esetén nyilván teljesül. Az az eset, amikor $|a_i - a_j| = 2$ csak akkor fordulhat elő, ha az egyik 0 vagy ha az egyik 3, amik csak egy-egy tagban vétetnek fel, ezekben az esetekben pedig látható, hogy az indexek paritása épp megfelelő. Az $|a_i - a_j| = 3$ eset csak úgy lehet,



hogy a két szám a 0 és a 3, amik mindketten egy tagban vétetnek fel, és ezek indexének különbsége pont 3. Az alábbi ábrán látható a sorozat koordináta-rendszerben ábrázolva.





D6. Játék: A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodsomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Vegyük észre, hogy bármelyik két különböző mezőről tudunk elvenni korongot, kivéve két szemköztiből. Tehát a játéknak csak úgy lehet vége, ha egyáltalán nem marad korong a pályán, vagy ha csak két szemközti mezőn marad korong. Valamint figyeljük meg azt is, hogy minden lépés után páros sok korong marad.

Nevezzük *nyerő*, illetve *vesztő* állapotnak azokat, amelyekből a soron következő játékos nyerni tud, illetve nem tud nyerni.

Állítás: Egy állapot akkor és csak akkor vesztő, ha bármelyik két szemközti mezőt vesszük is, azokon összesen páros sok korong van.

Ez könnyen láthatóan teljesül a végállapotokra (hiszen mint minden állapotban, azokban is páros sok korong van). Minden lépésben a szemközti mezőpárok három összege közül kettőt csökkentünk eggyel-eggyel. Ha a fenti állítás szerinti vesztő állapotban vagyunk, akkor bármit is lépünk, egy mezőpáron páros lesz az összeg, míg a másik két mezőpáron páratlan, így a kapott állásra viszont már nem lesz igaz az állítás, onnan az ellenfelünk nyerni tud. Ha viszont nyerő állapotban vagyunk, akkor – mivel az összes korong darabszáma páros, és nem mindhárom összeg páros – az egyik összeg páros lesz, a másik kettő páratlan. Ekkor a két páratlan összegű mezőpárnak válasszuk ki egy-egy olyan mezőjét, amin van korong, és ezekről vegyünk el egy-egy korongot. Ez megtehető, hiszen a két kiválasztott mező különböző mezőpárhoz tartozik, tehát nem lehetnek szemközti. Ezzel az ellenfélnek olyan állapotot hagyunk, melyben mindhárom összeg páros, és így az állításunk szerint ez vesztő állapot.

Így a fenti állítás alapján a kezdőállásnál el tudjuk dönteni, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnénk-e bújni, és a stratégiánk az, hogy minden lépésben mindhárom összeget párosra állítjuk.