



E

kategória

1. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek minden $n > 1$ egész számra van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege pontosan n .

2. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $\angle BCD = 150^\circ$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E , továbbá a BC oldal felezőpontja F . Legyen az E -ből AB -re állított merőleges talppontja G . Mekkora az FG szakasz hossza?

3. Gábor vendéglőjében csak kétféle ételt tudnak készíteni, főtt grifftojást és grillezett sárkányhúst. Sajnos a vendéglő konyhája kicsi, ezért minden nap pontosan az egyik ételből készítenek. Gábor úgy szeretné meghatározni jövőre az akciós napokat és az ételek sorrendjét, hogy az akciós napokon is felváltva legyen a két étel és a nem akciós napokon is. A beszállítónak az egzotikus alapanyagok miatt már most le kell adni az egész jövő évre, hogy melyik nap melyikből vigyenek majd a vendéglőbe. Hányféleképp tud Gábor rendelést leadni a beszállítónak, hogy megvalósíthassa a tervét jövőre, egy 365 napos évben?

Gábor vendéglője az év minden napján kinyit. Két megrendelést akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan nap, amelyre másféle alapanyagokat kér. A két ételt különböző alapanyagokból készítik.

4. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n -re az n pozitív osztóin felvett függvényértékek összege kettőhatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1), f(2), \dots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k .

A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Az n pozitív osztói közé beleértjük az 1-et és az n -et is. Azon számokat tekintjük kettőhatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

5. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácspontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d , ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácspontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácspontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnán is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácspontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.

Két megmaradt rácspont akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

6. **Játék:** A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodsomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írájatok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.

A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk:

a XIX. Dürer Verseny szervezői