

E1. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek minden $n > 1$ egész számra van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege pontosan n .

Hegedűs Dani feladata

Megoldás:

Az $1001 = 7 \times 143$ egy héttel osztható szám, ami számjegyeinek összege kettő. Ha egy héttel osztható számot megszorozunk egy pozitív egészszel, akkor továbbra is héttel osztható marad, illetve héttel osztható számok összege is héttel osztható. Így például héttel osztható $10010000 = 1001 \times 1000$ és emiatt $10010000 + 1001 = 10011001$ is az. Így ha egymás mögé írjuk az 1001-et valahányszor, akkor is héttel osztható számot kapunk. Ezzel minden páros számra találunk olyan héttel osztható számot, aminek annyi a számjegyösszege. A 21 héttel osztható, számjegyösszege három. Ha az előbb megtalált páros számjegyösszegű számokhoz 21-et adunk, ami szintén osztható héttel, akkor a kapott héttel osztható szám 1001 helyett 1022-re végződik, így 3-mal nőtt a számjegyek összege. Ezzel minden háromnál nagyobb páratlan számra is találtunk megfelelő héttel osztható számot, azaz beláttuk a feladat állítását.



E
kategória

E2. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $\angle BCD = 150^\circ$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E , továbbá a BC oldal felezőpontja F . Legyen az E -ből AB -re állított merőleges talppontja G . Mekkora az FG szakasz hossza?

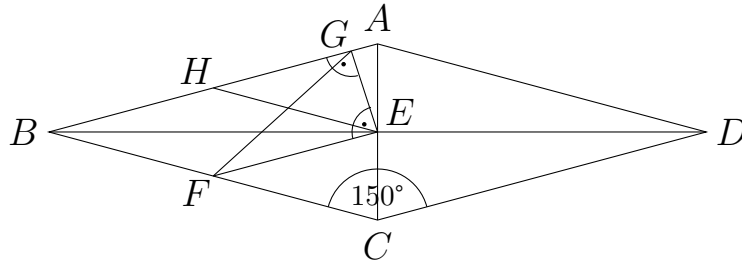
Hegedűs Dani feladata

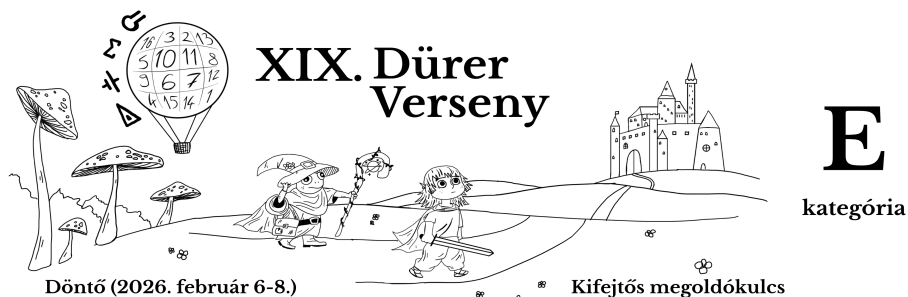
Megoldás: Mivel E az átlók metszéspontja, ezért E felezi az AC szakaszt. Tudjuk továbbá, hogy F felezi BC -t. Így EF középvonal az ABC háromszögben, így EF párhuzamos AB -vel. Tudjuk továbbá, hogy EG merőleges AB -re, így EF -re is. Vagyis az EGF háromszögben E -nél derékszög van. Így a feladatban kért GF szakasz hosszát kiszámolhatjuk a Pitagorasz-tétel segítségével. Ehhez szükségünk van a két befogó, vagyis az EF és EG szakaszok hosszára.

Láttuk már, hogy EF középvonal ABC -ben, vagyis $\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2}$. Viszont AB a rombusz egy oldala, vagyis $AB = 1$, amiből azt kapjuk, hogy $EF = \frac{1}{2}$.

Legyen H a C -ből az AB szakaszra állított merőleges talppontja. Tudjuk, hogy $\angle BCD = 150^\circ$, amiből következik, hogy $\angle ABC = \angle HBC = 30^\circ$. Ekkor viszont BCH egy szabályos háromszög fele (úgynevezett *fél szabályos háromszög*), mert $\angle BHC = 90^\circ$. Egy ilyen háromszögről ismert, hogy az átfogó a rövidebb befogó kétszerese, vagyis esetünkben $BC = 2 \cdot CH$, de tudjuk, hogy $BC = 1$, mert ez a rombusz egy oldala, így $CH = \frac{1}{2}$. Tudjuk, hogy CH és EG is merőleges AB -re, ezért párhuzamosak egymással. Ebből következik a párhuzamos szelők szakaszok tétele miatt, hogy $\frac{EG}{CH} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$, amiből kapjuk, hogy $EG = \frac{1}{4}$.

Végül csak az maradt hátra, hogy a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk az EGF háromszögre: $EG^2 + EF^2 = FG^2$, amibe behelyettesítve $FG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ hobbitláb.





E3. Gábor vendéglőjében csak kétféle ételt tudnak készíteni, főtt griftojást és grillezett sárkányhúst. Sajnos a vendéglő konyhája kicsi, ezért minden nap pontosan az egyik ételből készítenek. Gábor úgy szeretné meghatározni jövőre az akciós napokat és az ételek sorrendjét, hogy az akciós napokon is felváltva legyen a két étel és a nem akciós napokon is. A beszállítónak az egzotikus alapanyagok miatt már most le kell adni az egész jövő évre, hogy melyik nap melyikből vigyenek majd a vendéglőbe. Hányféleképp tud Gábor rendelést leadni a beszállítónak, hogy megvalósíthassa a tervét jövőre, egy 365 napos évben?

Gábor vendéglője az év minden napján kinyit. Két megrendelést akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan nap, amelyre másféle alapanyagokat kér. A két ételt különböző alapanyagokból készítik.

Kovács Benedek és Fraknói Ádám feladata

Megoldás: Nevezzük *blokkoknak* az olyan, egymás utáni napokból álló sorozatokat, melyeken ugyanaz az étel készül.

Először is vegyük észre, hogy nem lehet olyan blokk, ami 3 vagy annál több napból áll. Ekkor ugyanis a skatulyaelv miatt ezen napok között lenne legalább két akciós nap vagy legalább két nem akciós nap ugyanazzal az étellel, így valamelyik típusú napon sérülne az ételek váltakozása.

Tehát minden blokk egy- vagy kétnapos (a továbbiakban röviden: 1-es vagy 2-es). Vegyük észre azt is, hogy két 2-es blokk között mindig páros sok 1-es blokknak kell lennie (beleértve természetesen azt az esetet is, amikor nincs 1-es blokk köztük, azaz a két 2-es blokk közvetlenül egymás melletti). Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy az x -edik és $x+1$ -edik napok, illetve az y -odik és $y+1$ -edik napok alkotnak 2-es blokkot, ahol $y > x+1$, és a két blokk közötti napok ($x+2$, $x+3$, ..., $y-1$) pedig 1-es blokkok, melyekből páratlan sok van. Ekkor a két 2-es blokk közt páros sok ételváltás van, azaz az x , $x+1$, y és $y+1$ napokon ugyanaz az étel készül (mondjuk griftojás). Világos, hogy az x és $x+1$ napok közül is pontosan az egyik akciós, és az y és $y+1$ napok közül is. Azonban az akciós napokon felváltva kell lennie az ételeknek, így az $x+2$, ..., $y-1$ napok között páratlan sokszor kell akciós napnak lennie. Ugyanez viszont elmondható a nem akciós napokra is, vagyis az $x+2$, ..., $y-1$ napok között a nem akciós napok száma is páratlan. Összesen így az $x+2$, ..., $y-1$ napok páros sokan vannak, ami ellentmondás.

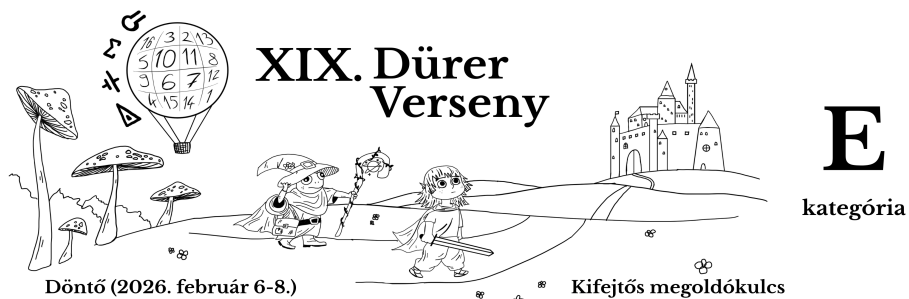
Most belátjuk, hogy a fenti feltétel elégséges is. Azaz ha a 2-es blokkok között mindenhol páros sok 1-es van, akkor az akciós napok kijelölhetők a feltételeknek megfelelően. Egy lehetséges kijelölés a következő: a 2-es blokkok első napja akciós legyen, a második pedig nem. Ezeken kívül pedig az összes 1-es blokk legyen akciós. Ekkor bármely két szomszédos 2-es blokkban különböző az étel, így a nem akciós napokon felváltva lesznek az ételek. Mivel minden blokkban egy akciós nap van, az akciós napokon is váltakoznak az ételek.

Egy megrendelést beazonosít az alábbi két információ, melyek egymástól függetlenül választhatók meg:

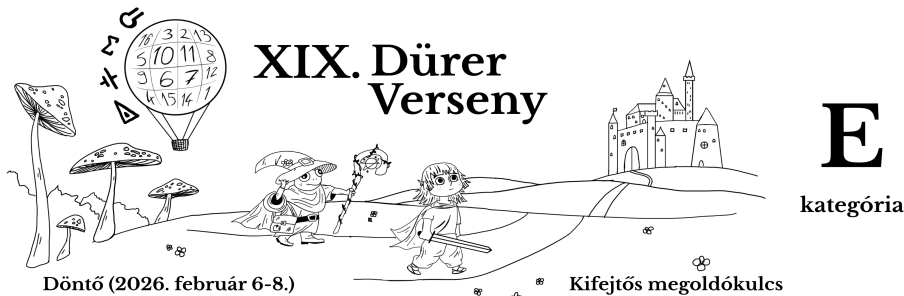
- az első napi étel,
- valamint az, hogy az 1-es és 2-es blokkok milyen sorrendben követik egymást.

Világos, hogy az első napi étel kétféle lehet. Most határozzuk meg, hogy hányféle lehet a blokkok sorrendje. Lehet minden blokk 1-es, ez 1 eset. Most számoljuk meg azokat az eseteket, amikor van 2-es blokk. Mivel a blokkok szerkezete olyan, hogy bármely két 2-es blokk között páros sok 1-es van, ezért a 2-es blokkok kezdőnapjai vagy mind páratlan, vagy mind páros sorszámú napon vannak. Utóbbi esetben az ételsorozatok felírhatók az előbbi esetből kapott ételsorozatok tükröképeként (mivel az év napjainak száma páratlan), így a szimmetria miatt elegendő az előbbi esettel foglalkoznunk.

Az évben az 1., 3., 5., ..., 363. sorszámú napok közül mindegyik vagy kezdőnapja egy 2-es blokknak, vagy nem. Utóbbi esetben az adott nap és az azt követő nap is 1-es blokk, így ez a $364/2 = 182$ információ meghatározza a blokkosorrendet, és mindegyikük külön-külön megválasztható. Így a blokkok sorrendje 2^{182} -féle lehet, de azt az esetet már az elején számoltuk, amikor nincs 2-es blokk. Így $2^{182} - 1$ blokkosorrendünk van; a tükrös esetekkel, valamint a csupa 1-es esettel együtt $2 \cdot (2^{182} - 1) + 1 = 2^{183} - 1$.



Össességében tehát (az első napi étel szabad megválasztását is figyelembe véve) a lehetséges megrendelések száma $2 \cdot (2^{183} - 1) = 2^{184} - 2$.



E4. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n -re az n pozitív osztóin felvett függvényértékek összege kettőhatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1), f(2), \dots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k .

A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Az n pozitív osztói közé beleértjük az 1-et és az n -et is. Azon számokat tekintjük kettőhatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

Varga Boldi feladata

Megoldás: A legkisebb ilyen szám az 512.

Először megmutatjuk, hogy ennél kevesebb nem lehet. Legyen $f^+(n)$ az n pozitív osztóin felvett függvényértékek összege.

Ekkor $f^+(1) < f^+(2) < \dots < f^+(1024)$ különböző kettőhatványok, tehát $f^+(1024) \geq 1024$, és $f^+(512) \leq \frac{1}{2}f^+(1024)$. Ebből $f(1024) = f^+(1024) - f^+(512) \geq \frac{1}{2}f^+(1024) \geq 512$.

Már csak adnunk kell egy konstrukciót, amire ez lesz a válasz. Írjuk fel $n > 1$ -et $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ alakban, ahol a p_i -k páronként különböző prímszámok, valamint $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ minden $1 \leq i \leq k$ -ra. Ezt használva legyen $f(n) = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k - k}$. Valamint legyen $f(1) = 1$.

Ha $n \leq 2026$, akkor $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 10$, és $n > 1$ -re $k \geq 1$, tehát $f(n) \leq 512$. Így már csak azt kell belátni, hogy $f^+(n)$ kettőhatvány lesz minden n -re.

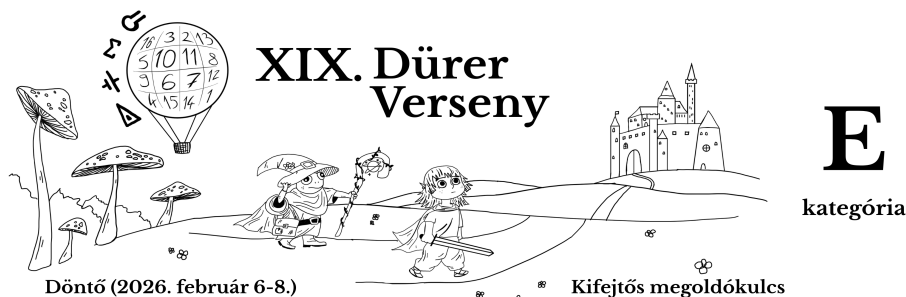
Ezt n különböző prímtenyezőinek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = p^\alpha$, akkor $f^+(n) = f(1) + f(p) + \dots + f(p^\alpha) = 1 + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{\alpha-1} = 2^\alpha$, ami kettőhatvány.

Most tegyük fel, hogy n -nek van legalább két különböző prímosztója. Ekkor léteznek egymáshoz relatív prím a és b pozitív egészek, melyekre $ab = n$, és a -nak és b -nek is kevesebb prímosztója van, mint n -nek. Például a fenti prímtenyezős felbontást használva $a = p_1^{\alpha_1}$, $b = \frac{n}{a}$ jó választás.

Vegyük észre, hogy ha a és b relatív prímelek, akkor $f(ab) = f(a)f(b)$, valamint ha a osztói $a_1, a_2, \dots, a_l$ és b osztói $b_1, b_2, \dots, b_m$, akkor ab osztói felírhatók $a_i b_j$ alakban, ahol $1 \leq i \leq l$ és $1 \leq j \leq m$, hiszen ezek mind osztják ab -t és különbözők. Ebből $f^+(n) = f(a_1 b_1) + f(a_1 b_2) + \dots + f(a_1 b_m) + f(a_2 b_1) + \dots + f(a_2 b_m) + \dots + f(a_l b_1) + \dots + f(a_l b_m) = f(a_1)f(b_1) + f(a_1)f(b_2) + \dots + f(a_1)f(b_m) + f(a_2)f(b_1) + \dots + f(a_2)f(b_m) + \dots + f(a_l)f(b_1) + \dots + f(a_l)f(b_m) = (f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_l))(f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_m)) = f^+(a)f^+(b)$.

Az indukció szerint $f^+(a)$ és $f^+(b)$ is kettőhatvány, tehát a szorzatuk, $f^+(n)$ is az, így kész vagyunk.

Megjegyzés: a megoldásban kapott konstrukció ugyanaz, mint az, amit úgy kapunk, hogy minden n -re növekvő sorrendben $f(n)$ -t beállítjuk a legkisebb olyan értékre, amire $f^+(n)$ kettőhatvány.



E5. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácspontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d , ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácspontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácspontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnán is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácspontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.

Két megmaradt rácspontra akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

Tarján Berci és Varga Boldi feladata

Megoldás: Belátjuk, hogy d tetszőleges lehet.

Minden páros d távolságra konstruálunk egy olyan rácsponthalmazt, amelyre igaz, hogy bármely két rácspontra távolsága legalább d , de a megmaradó rácspontokat Gandalf nem tudja bejárni a kívánt módon.

Zárja ki Sauron azokat az (a, b) rácspontokat, melyekre $d|a$ és $d|b$.

Színezzük ki sakktáblaszerűen a négyzetrácsot fekete-fehérre. Mivel d páros, az összes kizárt pont egyszínű.

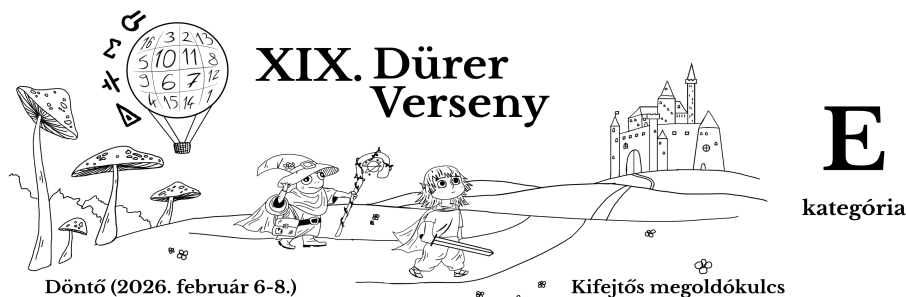
Tegyük fel indirekten, hogy Gandalf be tudja járni a megmaradt rácspontokat.

A bejárás egy *szakasza* alatt olyan rácspontokat értünk, melyeket Gandalf egymás után járt be. Minden szakaszon a fehér és fekete mezők felváltva vannak, tehát a számuk különbsége legfeljebb 1.

Tekintsünk tetszőleges $n \in \mathbb{Z}^+$ -ra egy $dn \times dn$ -es négyzetet, amiben nincs benne Gandalf kiindulópontja. Ebben a bejárt mezők Gandalf útján néhány diszjunkt szakaszra bomlanak, amiknek a két-két végpontja a négyzet oldalain van, tehát legfeljebb $2(dn - 1)$ ilyen szakasz van. Ebből a négyzeten belül lévő megmaradt pontokon a fekete és fehér mezők számának különbsége legfeljebb $2(dn - 1)$.

A négyzet összes pontján ez a különbség legfeljebb 1, a kizárt pontokon pedig n^2 , tehát $2(dn - 1) \geq n^2 - 1$.

Elég nagy n -re azonban $n^2 - 1 > 2dn - 2$, ami ellentmondás, tehát Gandalf valóban nem tudja bejárni a megmaradt pontokat.



E6. Játék: A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodsomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Vegyük észre, hogy bármelyik két különböző mezőről tudunk elvenni korongot, kivéve két szemköztiből. Tehát a játéknak csak úgy lehet vége, ha egyáltalán nem marad korong a pályán, vagy ha csak két szemközti mezőn marad korong. Valamint figyeljük meg azt is, hogy minden lépés után páros sok korong marad.

Nevezzük *nyerő*, illetve *vesztő* állapotnak azokat, amelyekből a soron következő játékos nyerni tud, illetve nem tud nyerni.

Állítás: Egy állapot akkor és csak akkor vesztő, ha bármelyik két szemközti mezőt vesszük is, azokon összesen páros sok korong van.

Ez könnyen láthatóan teljesül a végállapotokra (hiszen mint minden állapotban, azokban is páros sok korong van). Minden lépésben a szemközti mezőpárok három összege közül kettőt csökkentünk eggyel-eggyel. Ha a fenti állítás szerinti vesztő állapotban vagyunk, akkor bármit is lépünk, egy mezőpáron páros lesz az összeg, míg a másik két mezőpáron páratlan, így a kapott állásra viszont már nem lesz igaz az állítás, onnan az ellenfelünk nyerni tud. Ha viszont nyerő állapotban vagyunk, akkor – mivel az összes korong darabszáma páros, és nem mindhárom összeg páros – az egyik összeg páros lesz, a másik kettő páratlan. Ekkor a két páratlan összegű mezőpárnak válasszuk ki egy-egy olyan mezőjét, amin van korong, és ezekről vegyünk el egy-egy korongot. Ez megtehető, hiszen a két kiválasztott mező különböző mezőpárhoz tartozik, tehát nem lehetnek szemköztiiek. Ezzel az ellenfélnek olyan állapotot hagyunk, melyben mindhárom összeg páros, és így az állításunk szerint ez vesztő állapot.

Így a fenti állítás alapján a kezdőállásnál el tudjuk dönteni, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnénk-e bújni, és a stratégiánk az, hogy minden lépésben mindhárom összeget párosra állítjuk.