



E+
kategória

1. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n -re $\sum_{d|n} f(d)$ kettőhatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1), f(2), \dots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k .
A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Azon számokat tekintjük kettőhatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

2. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácspontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d , ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácspontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácspontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnán is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácspontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.
Két megmaradt rácspont akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

3. Az ABC háromszög magasságpontja legyen H , a BC oldal felezőpontja M . Legyen D olyan pont a BC egyenesen, amelyre $DH \perp AM$, valamint M tükörképe B -re legyen E . Továbbá tegyük fel, hogy BE Thalész-körének és AHD köréírt körének létezik két metszéspontja, legyenek ezek X és Y . Bizonyítsátok be, hogy X , Y és M egy egyenesre esnek.

4. Egy gráf csúcsait megszámozzuk a következőképpen: minden csúcsra egy olyan pozitív egészet írunk, ami legfeljebb a csúcs fokszáma. Egy véges, egyszerű, összefüggő gráfot *szépnek* nevezünk, ha minden ilyen számozás mellett létezik a gráfban olyan séta, amelynek a kezdő- és végpontja tetszőleges, valamint minden csúcsban pontosan annyszor jár, mint a csúcson lévő szám. Legkevesebb hány éle lehet egy $n > 1$ csúcsú szép gráfnak?
Egy gráfséta során a csúcsokat és az éleket többször is érinthetjük.

5. Legyen $P(x)$ egy olyan polinom, melynek minden együtthatója nemnegatív valós szám, továbbá $P(0) = 0$. Tegyük fel, hogy ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $P(-2025x) \geq -2025P(x)$. Legyenek $x_1, \dots, x_{2026}$ olyan valós számok, melyek összege nemnegatív. Bizonyítsátok be, hogy ha minden x_i -re teljesül, hogy $-2025 \leq x_i \leq 1$, akkor

$$P\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2026}}{2026}\right) \leq \frac{P(x_1) + \dots + P(x_{2026})}{2026}.$$

6. **Játék:** A játék kezdetén a játékvezető felír nyolc pozitív egész számot az első szintre, és megad egy k pozitív egész számot, ami nem nagyobb a nyolc szám összegénél. Egy lépésben a soron következő játékos letöröl két számot ugyanarról a szintről és az összegüket az eggyel nagyobb sorszámú szintre írja. Az a játékos nyer, aki először ír olyan számot, ami legalább k .
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a nyolc szám és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írájatok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk: