



E+1. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n -re $\sum_{d|n} f(d)$ kettőshatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1), f(2), \dots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k .

A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Azon számokat tekintjük kettőshatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

Varga Boldizsár feladata

Megoldás: A legkisebb ilyen szám az 512.

1. megoldás:

Először megmutatjuk, hogy ennél kevesebb nem lehet. Legyen $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Ekkor $f^+(1) < f^+(2) < \dots < f^+(1024)$ különböző kettőshatványok, tehát $f^+(1024) \geq 1024$, és $f^+(512) \leq \frac{1}{2}f^+(1024)$. Ebből $f(1024) = f^+(1024) - f^+(512) \geq \frac{1}{2}f^+(1024) \geq 512$.

Már csak adnunk kell egy konstrukciót, amire ez lesz a válasz. Írjuk fel n -et $\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ alakban, ahol a p_i -k páronként különböző prímszámok, valamint $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ minden $1 \leq i \leq k$ -ra. Ezt használva legyen $f(n) = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k - k}$.

Ha $n \leq 2026$, akkor $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 10$, és $n > 1$ -re $k \geq 1$, tehát $f(n) \leq 512$. Így már csak azt kell belátni, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ kettőshatvány lesz minden n -re.

Ezt n különböző prímtényezőinek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = p^\alpha$, akkor $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{i=0}^{\alpha} f(p^i) = 1 + \sum_{i=1}^{\alpha} 2^{i-1} = 2^\alpha$, ami kettőshatvány.

Most tegyük fel, hogy n -nek van legalább két különböző prímosztója. Ekkor léteznek egymáshoz relatív prím a és b pozitív egészek, melyekre $ab = n$, és a -nak és b -nek is kevesebb prímosztója van, mint n -nek. (Például a fenti prímtényező felbontást használva $a = p_1^{\alpha_1}$, $b = \frac{n}{a}$ jó választás.)

Vegyük észre, hogy ha a és b relatív prímelek, akkor $f(ab) = f(a)f(b)$, valamint ha $c | a$ és $d | b$, akkor c és d is relatív prímelek. Ebből $f^+(n) = \sum_{c|a} \sum_{d|b} f(cd) = \sum_{c|a} \sum_{d|b} f(c)f(d) = f^+(a)f^+(b)$, hiszen n osztói pontosan azok a számok, amik előállnak a és b egy-egy osztójának a szorzataként, és ezek a szorzatok mind különbözők.

Az indukció szerint $f^+(a)$ és $f^+(b)$ is kettőshatvány, tehát a szorzatuk, $f^+(n)$ is az, így kész vagyunk.

2. megoldás:

Az alsó becslést az első megoldás szerint csináljuk.

A felső becsléshez először definiáljuk $f^+(n)$ -t a következőképpen: ha $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, akkor $f^+(n) = 2^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}$.

Erre igaz, hogy $f^+(n)$ kettőshatvány, tehát csak az kell, hogy van olyan f függvény, ami mindenhol egy pozitív egész, és ezt az f^+ -t adja.

Ehhez használjuk a Möbius-féle inverziós képletet, ami szerint

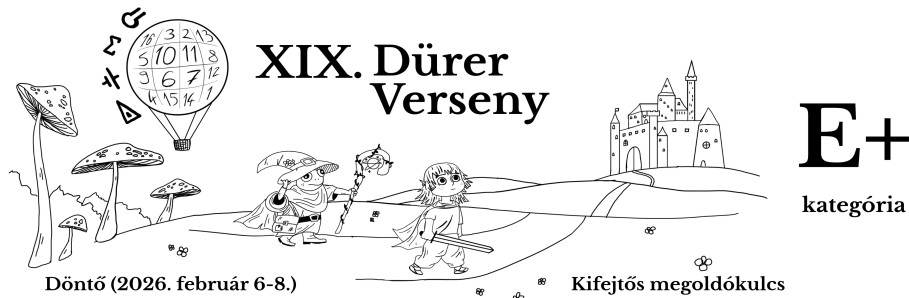
$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f^+\left(\frac{n}{d}\right), \quad \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \exists k : k^2 | d, \\ (-1)^k, & \text{ha } d \text{ egyenlő } k \text{ különböző prím szorzatával.} \end{cases}$$

Ebből

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f^+\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} 2^{s-i} = 2^{s-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \cdot 2^{k-i} = 2^{s-k} (2-1)^k = 2^{s-k},$$

ahol $s = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, ami egy nemnegatív egész, tehát kész vagyunk.

Megjegyzés: mindkét megoldásban kapott konstrukció ugyanaz, mint az, amit úgy kapunk, hogy minden n -re növekvő sorrendben $f(n)$ -t beállítjuk a legkisebb olyan értékre, amire $f^+(n)$ kettőshatvány.



E+2. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácpontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d , ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácpontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácpontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnan is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácpontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.

Két megmaradt rácpont akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

Tarján Berci és Varga Boldi feladata

Megoldás: Belátjuk, hogy d tetszőleges lehet.

Minden páros d távolságra konstruálunk egy olyan rácsponthalmazt, amelyre igaz, hogy bármely két rácpont távolsága legalább d , de a megmaradó rácpontokat Gandalf nem tudja bejárni a kívánt módon.

Zárja ki Sauron azokat az (a, b) rácpontokat, melyekre $d|a$ és $d|b$.

Színezzük ki sakktáblaszerűen a négyzetrácsot fekete-fehérre. Mivel d páros, az összes kizárt pont egyszínű.

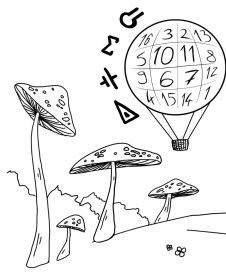
Tegyük fel indirekten, hogy Gandalf be tudja járni a megmaradt rácpontokat.

A bejárás egy *szakasza* alatt olyan rácpontokat értünk, melyeket Gandalf egymás után járt be. Minden szakaszon a fehér és fekete mezők felváltva vannak, tehát a számuk különbsége legfeljebb 1.

Tekintsünk tetszőleges $n \in \mathbb{Z}^+$ -ra egy $dn \times dn$ -es négyzetet, amiben nincs benne Gandalf kiindulópontja. Ebben a bejárt mezők Gandalf útján néhány diszjunkt szakaszra bomlanak, amiknek a két-két végpontja a négyzet oldalain van, tehát legfeljebb $2(dn - 1)$ ilyen szakasz van. Ebből a négyzeten belül lévő megmaradt pontokon a fekete és fehér mezők számának különbsége legfeljebb $2(dn - 1)$.

A négyzet összes pontján ez a különbség legfeljebb 1, a kizárt pontokon pedig n^2 , tehát $2(dn - 1) \geq n^2 - 1$.

Elég nagy n -re azonban $n^2 - 1 > 2dn - 2$, ami ellentmondás, tehát Gandalf valóban nem tudja bejárni a megmaradt pontokat.



XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.)

Kifejtős megoldókulcs

E+3. Az ABC háromszög magasságpontja legyen H , a BC oldal felezőpontja M . Legyen D olyan pont a BC egyenesen, amelyre $DH \perp AM$, valamint M tükörképe B -re legyen E . Továbbá tegyük fel, hogy BE Thalész-körének és AHD köréírt körének létezik két metszéspontja, legyenek ezek X és Y . Bizonyítsátok be, hogy X , Y és M egy egyenesre esnek.

Molnár-Szabó Vilmos feladata

Megoldás: Legyen ω a BC szakasz Thalész-köre, ennek M a középpontja és rajta van T és R , amik rendre a B -ből és C -ből induló magasságok talppontjai. Legyen TR és BC metszéspontja D' , erről belátjuk, hogy D -vel megegyezik. A $BCTR$ húrnégyszögben 3-féleképpen lehet átlók metszéspontját venni, ezek A , H és D' , tehát a Brocard-tétel szerint A polárisa ω -ra nézve $D'H$, ami így merőleges AM -re, és hasonlóan D' polárisa AH . Mivel $D'H \perp AM$ és $DH \perp AM$, így $D' = D$. Másrészt $AH \perp DM$ és $DH \perp AM$, tehát M az AHD háromszög magasságpontja. Így M tükörképe az AH egyenesre az nem más mint BC egyenes és az AHD második metszéspontja (vagy D , ha érinti BC -t), legyen ez a pont M' , az AH magasság talppontja P .

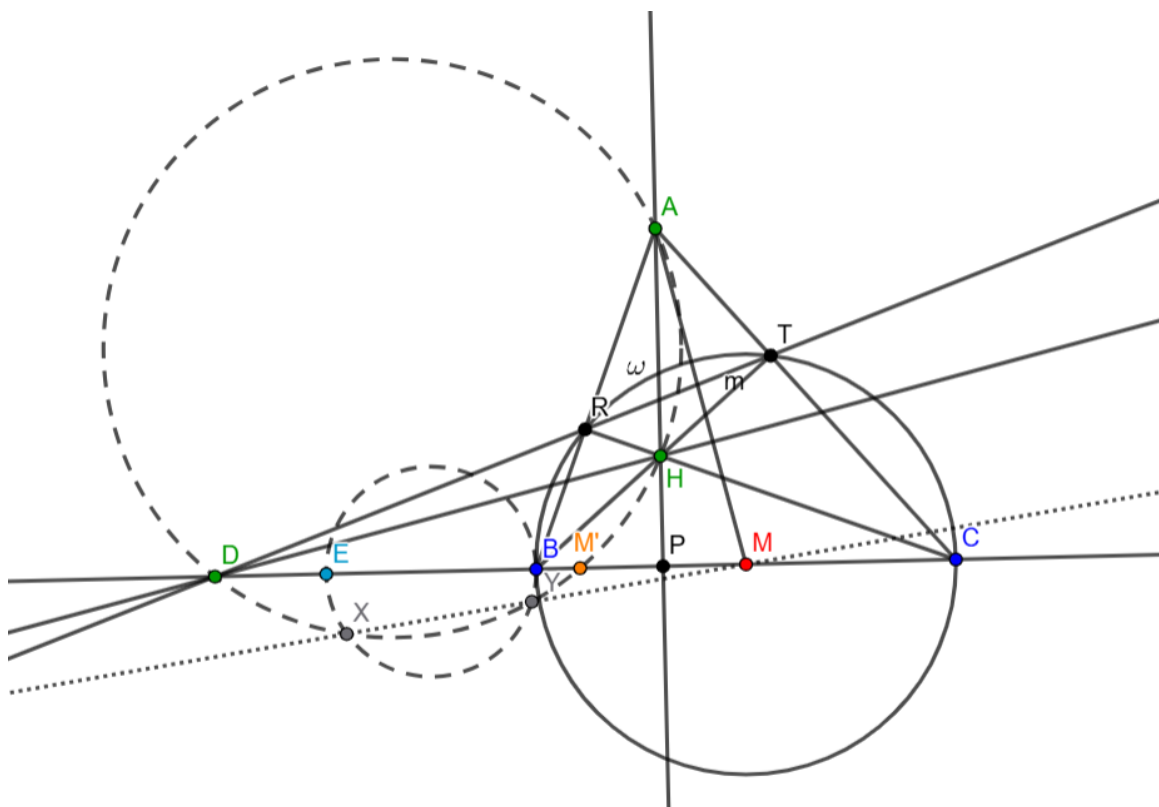
D polárisa ω -ra AP , tehát D inverze ω -ra P , így

$$MP \cdot MD = MB^2$$

Megszorozva mindkét oldalt kettővel

$$MM' \cdot MD = ME \cdot MB$$

azaz az M' -nek ugyanaz az $(AHD M')$ körre és BE Thalész-körére vonatkozó hatványa, tehát M rajta van a hatványvonalukon, ami az XY egyenes.





E+
kategória

E+4. Egy gráf csúcsait megszámozzuk a következőképpen: minden csúcsra egy olyan pozitív egészet írunk, ami legfeljebb a csúcs fokszáma. Egy véges, egyszerű, összefüggő gráfot *szépnek* nevezünk, ha minden ilyen számozás mellett létezik a gráfban olyan séta, amelynek a kezdő- és végpontja tetszőleges, valamint minden csúcsban pontosan annyszor jár, mint a csúcsban lévő szám. Legkevesebb hány éle lehet egy $n > 1$ csúcsú szép gráfnak?

Egy gráfséta során a csúcsokat és az éleket többször is érinthetjük.

Németh Marci feladata

Megoldás: Egy ilyen gráfnak legkevesebb

$$e(n) = \begin{cases} k(k-1) + 1 & \text{ha } n = 2k \\ k^2 + 1 & \text{ha } n = 2k + 1 \end{cases}$$

éle lehet.

Először megmutatjuk, hogy ez elérhető. Látható, hogy $e(n)$ éppen az élek száma abban az n csúcs gráfban, melyben a csúcsok két minél egyenlőbb osztályba vannak osztva, melyek osztályon belül egy teljes klikket alkotnak, és a két klikk össze van kötve egy éllel. Általánosabban igazoljuk, hogy ha egy $n + 1$ és egy $m + 1$ csúcsú klikket összekötünk egy éllel, a kapott $G = A \cup B$ gráf szép lesz.

Legyenek a csúcsok $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$, ahol az A , illetve B által feszített részgráfok teljesek, valamint van még egy él a_0 és b_0 között. Legyen az x csúcs fokszáma $d(x)$, a ráírt érték $1 \leq f(x) \leq d(x)$.

Először készítünk egy listát, melyben az a_i ($1 \leq i \leq n$) értékek szerepelnek, mindegyik pontosan $f(a_i)$ -szer, és két szomszédos csúcs nem ugyanaz. Ehhez válasszuk ki azt az i -t, melyre $f(a_i)$ maximális, és írjuk le a_i -t $f(a_i)$ -szer egymás után. Most tetszőleges sorrendben szűrjünk közbe a_j ($i \neq j$) értékeket, a_j -t legfeljebb $f(a_j)$ -szer, hogy egy olyan listát kapjunk, melyben felváltva jön a_i és más csúcs.

Ezt meg lehet tenni, hiszen $f(a_i) \leq d(a_i) = n$ és $f(a_j) \geq 1$, illetve éppen $n - 1$ darab j index van, melyre $i \neq j$, tehát például használhatjuk az összes ilyen indexet egyszer. Ha maradt a_j érték, melyet nem használtunk $f(a_j)$ -szer, akkor ezeket tetszőleges sorrendben szűrjük be két olyan érték közé, amik közül egyik sem a_j . Ezt meg lehet tenni: a listánk legalább $2f(a_i) - 1$ hosszú, tehát $2f(a_i)$ helyre lehet beszúrni, és egy lépésben legfeljebb $2(f(a_j) - 1) \leq 2(f(a_i) - 1)$ helyre nem lehet beszúrni, tehát készen vagyunk.

Most szűrjük be a_0 -t $f(a_0)$ -szor az elkészült lista végére, illetve a listában szereplő számok közé úgy, hogy semelyik két szomszédos szám közé nem szűrjük be kétszer. Ezt meg lehet tenni, hiszen a lista hossza legalább n , és $f(a_0) \leq d(a_0) = n + 1$. Szimmetrikusan készítsük el ezt a listát a B gráfra is, úgy, hogy az b_0 -lal kezdődjön. Végül írjuk egymás után a két listát. Ez egy, a feltételeknek megfelelő séta lesz G csúcsain.

Most rátérünk az alsó korlát bizonyítására.

Vegyük észre, hogy ha egy csúcsra a fokszáma van írva, és minden szomszédjára 1, akkor az csak úgy lehet, ha a séta egyik végpontja. Ugyanis ha nem végpont lenne, akkor minden alkalommal, mikor a csúcsra lépünk, előző lépésben az egyik szomszédján voltunk, és ezenkívül még az egyik szomszédján jártunk az utolsó érintése utáni lépésben is, tehát összesen legalább eggyel többször, mint a foka. Viszont a szomszédain összesen annyszor jártunk, mint ami a foka, ez ellentmondás. Ebből látszik, hogy G -ben nincs 3 nagyságú független ponthalmaz, mert akkor ezekre a fokszámukat, minden másra 1-et írva azt kapnánk, hogy ezek mind végpontjai a sétának, ami ellentmondás.

Így a Turán (vagy Mantel) tétel komplementere miatt legalább annyi éle van, mint annak a gráfnak, melyben két, nagyjából egyenlő nagyságú klikk van, és az optimum csak erre a gráfra teljesül. Mivel G -nek triviálisan összefüggőnek kell lennie, a konstrukciónk optimális.



E+5. Legyen $P(x)$ egy olyan polinom, melynek minden együtthatója nemnegatív valós szám, továbbá $P(0) = 0$. Tegyük fel, hogy ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $P(-2025x) \geq -2025P(x)$. Legyenek $x_1, \dots, x_{2026}$ olyan valós számok, melyek összege nemnegatív. Bizonyítsátok be, hogy ha minden x_i -re teljesül, hogy $-2025 \leq x_i \leq 1$, akkor

$$P\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2026}}{2026}\right) \leq \frac{P(x_1) + \dots + P(x_{2026})}{2026}.$$

Bán-Szabó Áron feladata

Megoldás: Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_k$ számok negatívak, az $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2026}$ számok pedig nemnegatívak. Ha az összes szám nemnegatív, akkor $k = 0$.

Mivel minden $1 \leq i \leq k$ -ra $-2025 \leq x_i < 0$, így $0 < -\frac{x_i}{2025} \leq 1$. Legyen $y_i = -\frac{x_i}{2025}$. Ekkor az $y_1, \dots, y_k$ számokra alkalmazható a megadott egyenlőtlenség: $P(x_i) \geq -2025P(y_i)$. Összeadva:

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_k) \geq -2025(P(y_1) + P(y_2) + \dots + P(y_k))$$

Azonban vegyük észre, hogy

$$P(y_1) + P(y_2) + \dots + P(y_k) \leq P(y_1 + y_2 + \dots + y_k),$$

ami azért igaz, mert ha a jobb oldalt kibontjuk polinomként, akkor a bal oldal minden tagja szerepelni fog a jobb oldalon is, illetve még nemnegatív együtthatós tagok, melyekbe a pozitív y_i -k polinomjai vannak beírva, tehát ezek összege biztosan nemnegatív. Így

$$\begin{aligned} P(x_1) + \dots + P(x_{2026}) &\geq -2025((P(y_1) + \dots + P(y_k)) + P(x_{k+1}) + \dots + P(x_{2026})) \geq \\ &\geq -2025P(y_1 + y_2 + \dots + y_k) + (k-1)P(0) + P(x_{k+1}) + \dots + P(x_{2026}) \end{aligned}$$

használva, hogy $P(0) = 0$. Azonban a $P(x)$ polinom a nemnegatív valósokon konvex, mert második deriváltja is egy nemnegatív együtthatós polinom, ami nemnegatív valósokon nemnegatív értéket vesz fel. Ezért a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$(k-1)P(0) + P(x_{k+1}) + P(x_{k+2}) + \dots + P(x_{2026}) \geq 2025P\left(\frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{2026}}{2025}\right).$$

Mostantól az egyszerűség kedvéért legyen $X = \frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{2026}}{2025}$ és $Y = y_1 + y_2 + \dots + y_k$. Ekkor világos, hogy elég belátnunk, hogy

$$\frac{2025P(X) - 2025P(Y)}{2026} \geq P\left(\frac{2025X - 2025Y}{2026}\right),$$

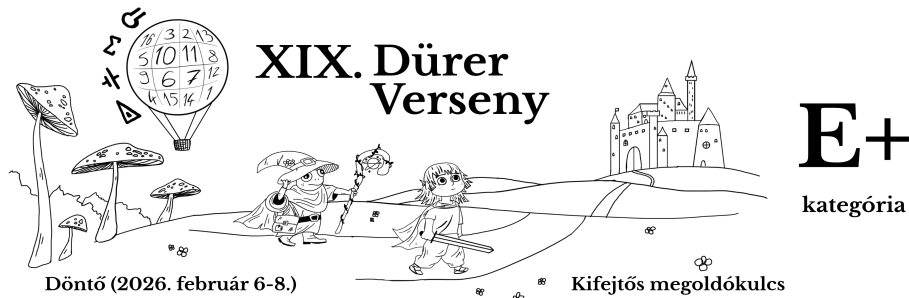
hiszen $2025X - 2025Y = x_1 + x_2 + \dots + x_{2026}$. Ehhez először az kell, hogy

$$\frac{2025P(X) - 2025P(Y)}{2026} \geq \frac{2025}{2026}P(X - Y),$$

ugyanis $P(X - Y) + P(Y) \leq P(X)$, megint alkalmazva, hogy $P(a) + P(b) \leq P(a + b)$ tetszőleges a, b nemnegatív számokra, ahogy fent bizonyítottuk. Továbbá

$$\frac{2025}{2026}P(X - Y) \geq P\left(\frac{2025}{2026}(X - Y)\right),$$

mert mindkettőt $X - Y \geq 0$ polinomjaként felírva a bal oldalon minden tag szorzója $\frac{2025}{2026}$ lesz, míg a jobb oldalon az i -edfokú tag szorzója $\left(\frac{2025}{2026}\right)^i$, ami kisebb vagy egyenlő lesz $i \geq 1$ esetén. Azonban $P(0) = 0$, vagyis P konstans tagja 0, tehát a bal oldalon az összes tag szorzója legalább akkora, mint a jobb oldalon, és mivel minden tag nemnegatív, ez elegendő. Az utolsóként kapott két egyenlőtlenség egymás után fűzése pedig pont az, amit meg szerettünk volna kapni.



E+6. Játék: A játék kezdetén a játékvezető felír nyolc pozitív egész számot az első szintre, és megad egy k pozitív egész számot, ami nem nagyobb a nyolc szám összegénél. Egy lépésben a soron következő játékos letöröl két számot ugyanarról a szintről és az összegüket az eggyel nagyobb sorszámú szintre írja. Az a játékos nyer, aki először ír olyan számot, ami legalább k .

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a nyolc szám és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Imolay Andris feladata

Megoldás: Legyenek a számok az első szinten: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_8$. A második, harmadik és negyedik szinten lévő számok szintenként a leírás sorrendjében: $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2$ és d .

A második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $a_1 + a_2 + a_7 + a_8 < k$ és $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geq k$.

Tegyük fel, hogy valamelyik feltétel nem teljesül. Megmutatjuk, hogy az elsőnek van nyerő stratégiája.

Az első játékos az első lépésben írja a $b_1 = a_1 + a_2$ -t. Ha ezzel nem nyer, akkor ezután a második játékos ír egy $b_2 \geq a_7 + a_8$ számot. Ezzel ő nem tud nyerni, mivel $b_2 \leq b_1$. Következő lépésben az első játékos a $c_1 = b_1 + b_2 \geq a_1 + a_2 + a_7 + a_8$ -t írja. Ha ez legalább k , akkor nyer az első játékos. Ha ez kisebb, mint k , akkor a feltevésből tudjuk, hogy az $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < k$. A következő három lépésben a legnagyobb előállítható szám a $c_2 = b_3 + b_4 \leq a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < k$, így az első játékos fog nyerni a $d = c_1 + c_2 \geq k$ -val.

Most mutassuk meg, hogy a második játékos tud nyerni, ha mindkét feltétel teljesül. Mivel $a_1 + a_2 < k$, ezért csak a c_1, c_2 és d számokkal lehet nyerni.

Az első játékos először ír egy b_1 -et, majd a második játékos az alsó szinten megmaradó két legkisebb számot összeadva ír egy b_2 -t. Ezután az első játékos készít egy $c_1 = b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2 + a_7 + a_8 < k$ számot, vagy egy b_3 -t. Ha b_3 -at ír, akkor a második játékos készíti el a $c_1 = b_1 + b_2 < k$ számot. Így a következő szám, amivel lehet nyerni, az c_2 lesz. Látható, hogy a c_2 pontosan a 6. lépésben tud létrejönni, így a második játékos fogja leírni. Mivel nem lesz benne a_7 és a_8 , mivel azok b_1 vagy b_2 -be kerültek, így $c_2 = b_3 + b_4 \geq a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geq k$, vagyis a második játékos fog nyerni.