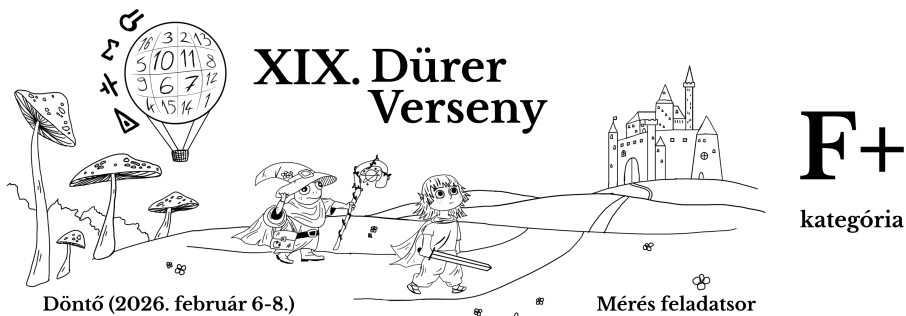




Figyelem! A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldás számszerű közlése, a mérés lépéseit tartalmazó jegyzőkönyv és a végeredmény hibájára vonatkozó becslés is szükséges!

A mérés célja

A mérés során egy Bunsen-állványra akasztott matematikai inga lengését vizsgáljuk különböző damilhosszak mellett. A damil hosszának a lengésidőhöz képest lassú változtatása esetén bizonyos mennyiségek megmaradnak a mozgás során, ezek meghatározása a célunk.

Elméleti bevezető

A matematikai inga egy elhanyagolható tömegű, ℓ hosszúságú fonalra függesztett, m tömegű pontszerű testből áll, amelyre szabad erőként csak a nehézségi erő hat. Az inga nyugalmi helyzetéhez képest egy adott időpillanatban a függőlegessel bezárt szöget nevezzük szögkitérésnek (φ). Kis szögek esetén az inga elmozdulását vízszintessel közelítjük, és egy adott magasságban a vízszintes kitérést (x) vizsgálhatjuk. Ennek maximuma az amplitúdó (A).

Mérési eszközök

A mérés során rendelkezésünkre áll egy *Bunsen-állvány*, melynek rúdjaához egy gyűrű van rögzítve. Adott még egy *vékony damil*, illetve két *nehézék*, melyekből a damilt a gyűrűhöz csatolt *dión* átvetve inga készíthető. Rendelkezésre áll egy *szigetelőszalag* a damil jelöléséhez, emellett adott egy *vonalzó*, mellyel a kitérés amplitúdója mérhető és egy *milliméterpapír* az ábrázoláshoz.

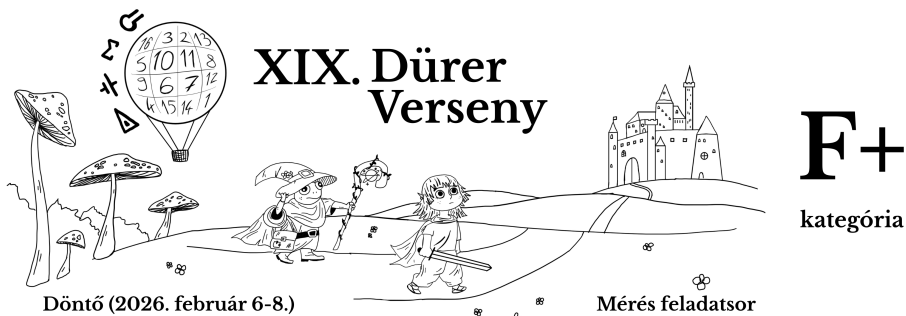
Elméleti feladatok

1. feladat (5 pont)

Tekintsük a fent ismertetett matematikai ingát, amely a $t = 0$ pillanatban $\varphi_{\max} \ll 1$ rad szögkitéréssel, nyugalomból indul. Fejezzük ki a φ szögkitérést és a felfüggesztési ponton áthaladó, a fonálra merőleges tengelyre vonatkozó J perdületet, mint az idő függvényeit! Az időt kiküszöbölve határozzuk meg és ábrázoljuk a $\varphi - J$ síkon, azaz a *fázistéren*, a mozgást jellemző trajektóriát!

2. feladat (3 pont)

Számítsuk ki a fázistérbeli trajektória által közrezárt I területet! Ez a mennyiség a rendszer paramétereinek lassú változtatása esetén közelítőleg állandó, ezért neve *adiabatikus invariáns*.



3. feladat

(3 pont)

Az adiabatikus invariáns megmaradásának feltételét felhasználva vezessük le a maximális szögkitérés logaritmusa és az inga hosszának logaritmusa közti

$$\ln(\varphi_{\max}) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I^2 \ell_0^3}{m^2 g}\right) - \frac{3}{4} \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)$$

összefüggést! Itt ℓ_0 a fonál kezdeti hosszát jelöli, de helyettesíthető lenne bármilyen más hosszúságdimenziójú paraméterrel is.

Mérési feladatok

4. feladat

(4 pont)

Kezdeként a szigetelőszalagból levágott apró darabok segítségével 10 cm-es beosztással jelöljük meg a damilnak kb. 1 m-es szakaszát, majd készítsük el az ingát, a Bunsen-állványt az asztal szélére helyezve. Figyeljete arra, hogy a damil a dió csavarjának menetén haladjon keresztül, hogy ne tudjon elcsúszni. A damil egyik végére kössük rá a súlyt, másik végét vessük át az állványra szerelt dión és tartsuk kézben, hogy a hosszát változtatni lehessen. A feladat során végig kis kitéréseket használjatok, és óvatosan változtassátok a damil hosszát, **ne vágjátok el a kezetek!**

Állítsuk az inga hosszát a lehető legnagyobbra, majd mérjük meg ekkor a lelógó damil hosszát (ℓ_0). Ezután térítsük ki az ingát, és a vonalzó segítségével az asztal magasságában olvassuk le a lengés amplitúdóját (A). Lassan rövidítve az ingát, olvassuk le a jelölések segítségével, hogy különböző ingahosszakhoz mekkora amplitúdók tartoznak, ezekből és az aktuális damilhosszból már minden releváns mennyiség meghatározható.

5. feladat

(8 pont)

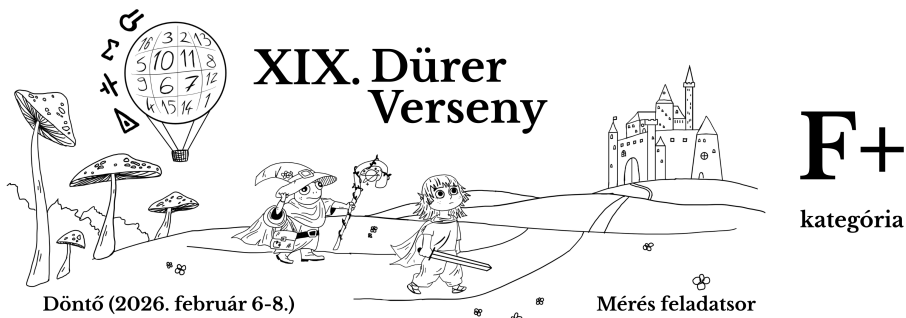
Végezzük el a 4. feladat lépéseit úgy, hogy a lehető legrövidebb ingával kezdünk, és folyamatosan növeljük a damil hosszát! Ezután ismételjük meg még egyszer ezt, vagy a 4. feladat lépéseit, ezt a döntést a csapatra bízuk.

6. feladat

(12 pont)

Az *elméleti feladatok* alapján az adatokat a megfelelő koordináta-rendszerben ábrázolva egyenes illeszthető az adatpontokra. Számoljuk ki a szükséges mennyiségeket, majd ábrázoljuk így a mérési eredményeinket. A három mérési sorozat eredményeit egy milliméterpapíron szemléltessük, különböző színeket vagy jelöléseket használva. Illesszünk az ábrázolt adatpontokra egyenest, határozzuk meg a meredekségét és az y -tengelymetszetét.

A legjobbnak vélt egyenes mellett illesszük még minden mérési sorozatnál azokat az előzőtől legjobban eltérő egyeneseket is, amelyek még „hihetők”, azaz éppen áthaladnak nagyjából az



összes adatpont hibatartományán! Határozzuk meg ezek meredekségeit és tengelymetszeteit is, majd számoljuk ki belőlük ezen értékek bizonytalanságait minden mérési sorozat esetén!

A három mérési sorozatból kapott eredményeket összesítve számoljuk ki a mért meredekséget hibájával együtt. Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket az *elméleti feladatok* során levezetett összefüggéssel! Ha eltérést tapasztalunk, mi okozhatta azt? Diskutáljuk a tengelymetszetek eredményét is!

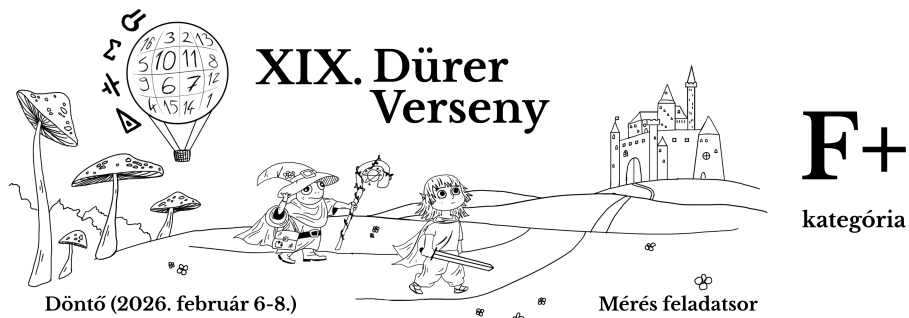
Segítség: Egy $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ függvény abszolút hibáját a hibaterjedésnek megfelelően az alábbi egyenlettel számolhatjuk:

$$\Delta f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \right| \Delta a_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \right| \Delta a_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial a_n} \right| \Delta a_n.$$

Itt Δa_i az a_i paraméter abszolút hibája.

A mérés elvégzésére és a jegyzőkönyv megírására 120 perc áll a csapatok rendelkezésére. Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők



Mérés feladatso

Táblázat

[illegible]