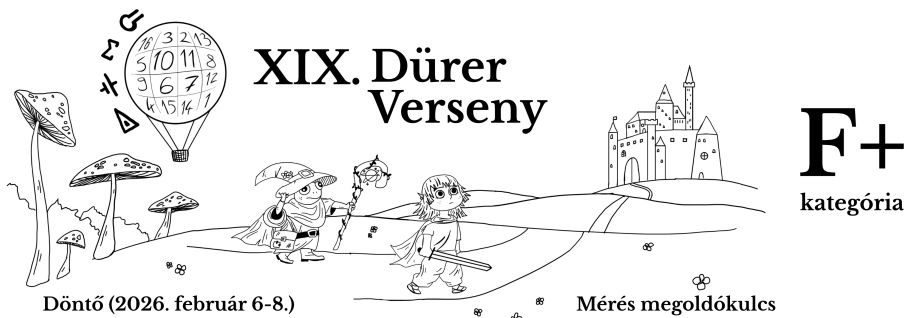




Elméleti feladatok

1. feladat

A fonálinga általános mozgása igen bonyolult, és felsőbb matematikai eszközöket igényel, azonban az általunk vizsgált kis kitérésű határesetben a mozgásegyenlet jól ismert módon a harmonikus rezgőmozgás alapegyenletére redukálódik. Ekkor a szögkitérés időfüggése egyszerűen kifejezhető:

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega t). \quad (1)$$

Itt $\omega = \sqrt{g/\ell}$ a rezgőmozgás körfrekvenciája. A pillanatnyi szögsebesség a fenti összefüggés időderiváltjaként, vagy pedig a rezgőmozgás nevezetes összefüggéseinek ismeretében kapható:

$$\dot{\varphi}(t) = -\varphi_{\max} \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

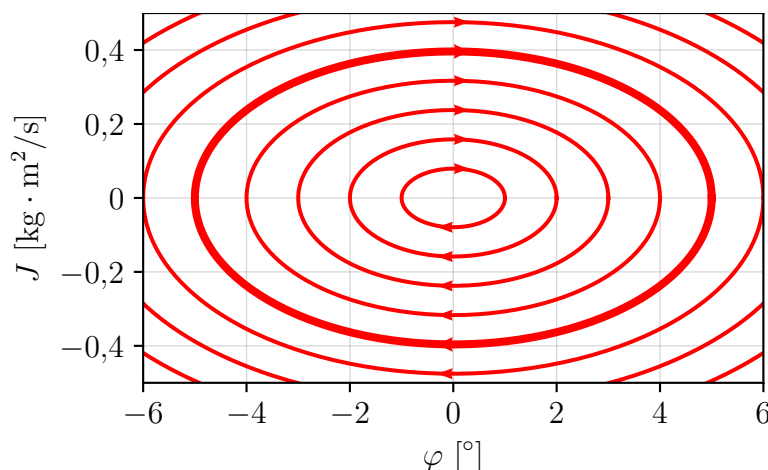
A perdület pedig ezen szögsebesség és a testnek a forgástengelyre vonatkoztatott $m\ell^2$ tehetetlenségi nyomatéka szorzataként adódik:

$$J = m\ell^2 \dot{\varphi} = -m\ell^2 \varphi_{\max} \omega \sin(\omega t). \quad (3)$$

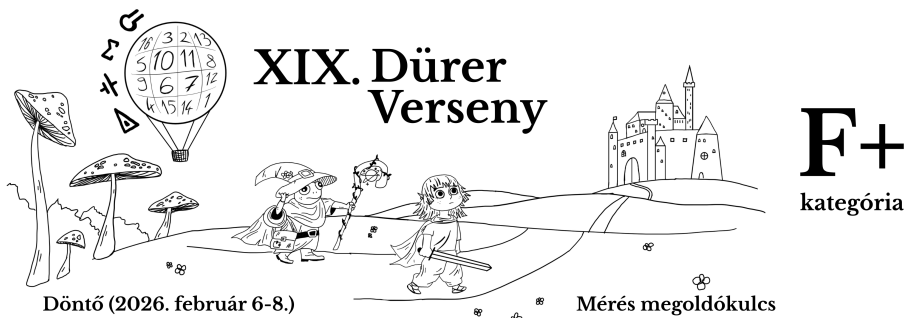
Az (1) és (3) egyenletekből a szögfüggvényeket kifejezve, továbbá a $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$ trigonometriai összefüggést felhasználva az idő kiküszöbölhető. Rendezés után az alábbi egyenletre jutunk:

$$\frac{\varphi^2}{\varphi_{\max}^2} + \frac{J^2}{(m\ell^2 \varphi_{\max} \omega)^2} = 1. \quad (4)$$

Ez jól láthatóan egy ellipszis egyenlete, amelynek főtengelyei rendre $\varphi_{\max}$ és $m\ell^2 \varphi_{\max} \omega$. A trajektóriát ábrázolhatjuk is a $\varphi - J$ síkon, ezt az 1. ábra mutatja.



1. ábra. A rendszer fázistérbeli trajektóriájának ábrázolása $m = 100$ g, $\ell = 40$ cm és különböző $\varphi_{\max}$ szögamplitúdók mellett. A $\varphi_{\max} = 5^\circ$ esetet vastaggal jelöltük.



2. feladat

Az adiabatikus invariáns a megadott definíció szerint az előző feladatban kapott ellipszis területe, azaz a féltengelyek szorzatának π -szerese. Behelyettesítve:

$$I = m\ell^2\varphi_{\max}^2\omega\pi. \quad (5)$$

Felhasználva továbbá a körfrekvenciára vonatkozó, korábban már említett $\omega = \sqrt{g/\ell}$ összefüggést, az adiabatikus invariáns kifejezhető a rendszer alapvető paraméterei és a szögamplitúdó segítségével:

$$I = mg^{1/2}\ell^{3/2}\varphi_{\max}^2\pi. \quad (6)$$

3. feladat

Az adiabatikus invariáns (6) képletét és annak mozgásállandó tulajdonságát felhasználva a szögamplitúdó kifejezhető, mint a fonál hosszának függvénye:

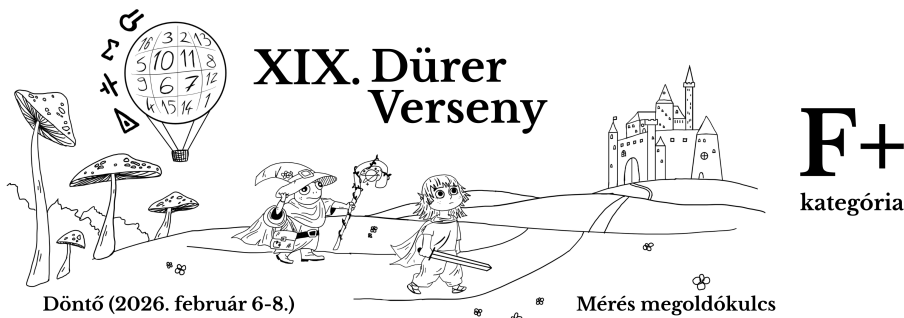
$$\varphi_{\max} = \sqrt[4]{\frac{I^2}{m^2g\pi^2}} \cdot \ell^{-3/4}. \quad (7)$$

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve a következő összefüggésre jutunk:

$$\ln(\varphi_{\max}) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I^2}{m^2g\ell^3\pi^2}\right). \quad (8)$$

A jobb oldali logaritmus argumentumában szereplő törtet bővíthetjük a kezdeti ℓ_0 fonálhossz köbével. Ezt követően logaritmikus azonosságokat felhasználva a jobb oldal különbséggé alakítható:

$$\ln(\varphi_{\max}) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I^2}{m^2g\ell_0^3\pi^2}\right) - \frac{3}{4} \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right). \quad (9)$$



Mérési feladatok

Minden damilhossz esetén feljegyeztük az amplitúdókat, ezek az 1. táblázatban láthatóak. Az egész mérés során csak ennek a két paraméternek a hibája terjed.

ℓ_0 [cm]	$\Delta\ell$ [cm]	A [cm]	ℓ [cm]	$\text{tg } \varphi_{\max}$	$\varphi_{\max}$ [rad]
57,5	10	3,6	67,5	0,063	0,063
57,5	20	3,4	77,5	0,059	0,059
57,5	30	3,2	87,5	0,056	0,056
57,5	40	2,9	97,5	0,050	0,050
57,5	50	2,6	107,5	0,045	0,045
55,5	10	3,7	65,5	0,067	0,067
55,5	20	3,4	75,5	0,061	0,061
55,5	30	3,0	85,5	0,054	0,054
55,5	40	2,7	95,5	0,049	0,049
55,5	50	2,5	105,5	0,045	0,045
55,5	10	4,9	65,5	0,088	0,088
55,5	20	4,5	75,5	0,081	0,081
55,5	30	4,1	85,5	0,074	0,074
55,5	40	3,6	95,5	0,065	0,065
55,5	50	3,2	105,5	0,058	0,058

1. táblázat. Bal oldalon a három mérési sorozat eredménye, ahol ℓ_0 a vonalzó és a felfüggesztés távolsága, $\Delta\ell$ a vonalzó és a súly távolsága, A a vonalozón mért kitérés. Jobb oldalon az ezekből számolt adatok: az ℓ teljes lengési hossz, valamint a $\varphi_{\max}$ maximális kitérés szög és annak tangense.

A vonalzó magasságában a damilhossz ℓ_0 , így a $\varphi_{\max}$ szöget az alábbi módon számolhatjuk:

$$\varphi_{\max} = \arctg\left(\frac{A}{\ell_0}\right). \quad (10)$$

A hibaterjedés képletét felhasználva:

$$\Delta\varphi_{\max} = \left|\frac{\partial\varphi_{\max}}{\partial A}\right| \Delta A + \left|\frac{\partial\varphi_{\max}}{\partial\ell_0}\right| \Delta\ell_0. \quad (11)$$

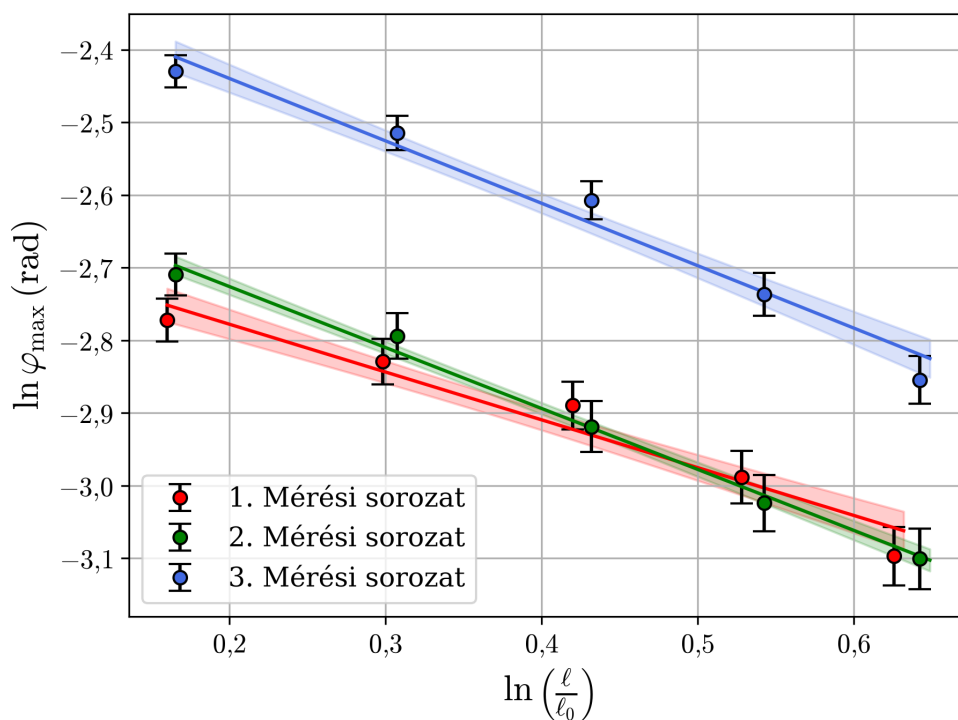
Elvégezve a deriválásokat, megkapjuk $\varphi_{\max}$ hibáját:

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{\ell_0\Delta A + A\Delta\ell_0}{\ell_0^2 + A^2}. \quad (12)$$

Könnyen látható, hogy

$$\Delta(\ln \varphi_{\max}) = \frac{\Delta \varphi_{\max}}{\varphi_{\max}}. \quad (13)$$

A (9)-es egyenletnek megfelelően az $\ln \varphi_{\max}$ értékeket $\ln(\ell/\ell_0)$ függvényében ábrázolva kapjuk az 2. ábrát. Ezen feltüntettük $\ln \varphi_{\max}$ hibáit is.

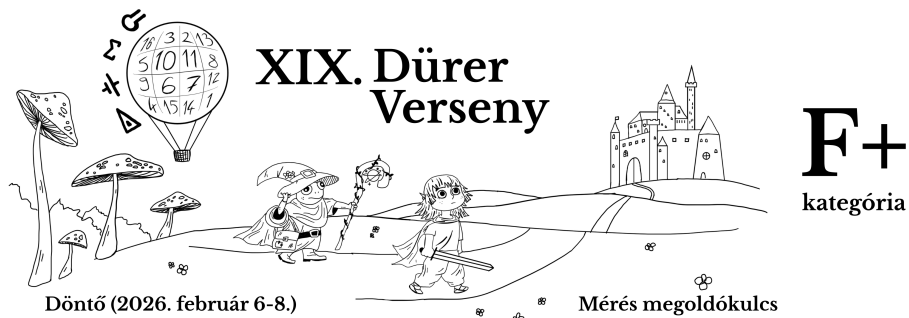


2. ábra. A mért maximális szögkitérés logaritmusá ábrázolva a damilhossz logaritmusának függvényében mindegyik mérési sorozat esetén. A satírozott 1σ -sáv jelöli az illesztés bizonytalanságát.

Az illesztésből meghatározható a meredekség, ez látható a 2. táblázatban. A meredekség hibáját mi numerikusan az illesztésből becsültük; a versenyzőktől a két „még éppen illeszkedő egyenes” illesztése volt elvárt, ezek meredekségével becsülhetjük a hibát.

	α	$\Delta\alpha$
1. mérés	0,66	0,09
2. mérés	0,84	0,05
3. mérés	0,86	0,08

2. táblázat. A különböző méréssorozatokra illesztett α értékek és hibáik.



A három mérési sorozatot súlyozott átlagából kapjuk a végeredményünket:

$$\boxed{\alpha = (0,81 \pm 0,04)} . \quad (14)$$

Ez hibahatáron belül egyezik az elméleti várakozásunkkal, jó volt tehát a modellünk. Az illesztésekből a függőleges tengelymetszet is meghatározható, ez jól láthatóan eltér a három mérési sorozat esetén. Mivel ez függ a kezdeti szögamplitúdótól, így nem meglepő a kapott eredmény. Az is látható, hogy a tengelymetszet nem zérus, ez is egyezik a várakozásainkkal.