

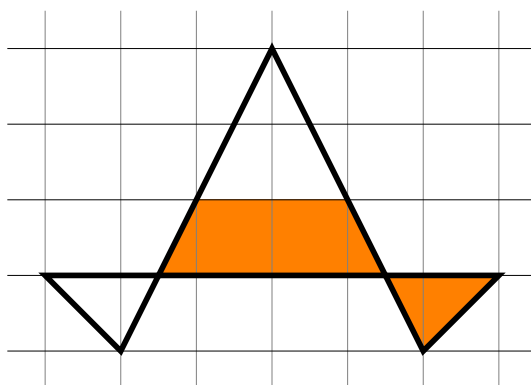


D
kategória

D1. Drakula összeadta a csupa páros számjegyeket tartalmazó 2026-nál nem nagyobb pozitív egész számokat. Milyen számjegyre végződik ez az összeg?

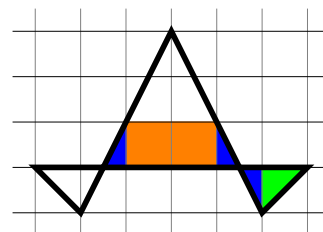
Megoldás: Az első pozitív egész, ami csupa páros számjegyből áll, a 2. Ha egy csupa páros számjegyű szám $\overline{abcd}$ alakú (a, b, c, d értéke 0 is lehet), akkor ha 2020-nál kisebb, akkor $\overline{abc0}, \overline{abc2}, \overline{abc4}, \overline{abc6}$ és $\overline{abc8}$ is szerepel a felsorolásban. Ezen öt szám összege 0-ra végződik, tehát csak a 2020-nál nem kisebb számok fontosak nekünk. Ezekre a $2020 + 2022 + 2024 + 2026$ összeg utolsó számjegye 2, így ez a végösszeg utolsó számjegye is.

D2. Az ábrán látható kalapban hány cm^2 a narancsszínű rész területe, ha egy kis négyzet területe 4 cm^2 ?



Megoldás:

Szimmetria miatt a három kék háromszög területe egyenlő. Továbbá a szimmetriából az is következik, hogy egy ilyen kis háromszög magassága egy kis négyzet oldala, az alapja pedig a fele, tehát a területe egy kis négyzet területének egynegyede, 1 cm^2 . A zöld háromszög egy kis négyzet fele, tehát 2 cm^2 területű. Összesen $2 \cdot 4 \text{ cm}^2 + 1 \cdot 2 \text{ cm}^2 + 3 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^2$ területű a narancsszínű rész.



D3. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?

A kétjegyű pozitív egész számok a 9-nél nagyobb és 100-nál kisebb egészek.

Megoldás: Legyen a keresett kétjegyű szám első számjegye a és a második számjegye b , tehát maga a szám $\overline{ab} = 10a + b$. Ekkor a számjegyek összege $a + b$, a számjegyek szorzata pedig $a \cdot b$. Ebből az alábbi egyenlőséget kapjuk: $10a + b = a + b + a \cdot b$. Levonva mondkét oldalból $a + b$ -t, azt kapjuk hogy $9a = a \cdot b$. Leoszthatunk a -val, mert a biztosan nem 0, így $b = 9$. Arra jutottunk, hogy $b = 9$, a viszont bármi lehet, mindenképpen teljesíteni fogja az egyenletet. Azaz a keresett kétjegyű számok: 19, 29, 39, 49, 59, 67, 89, 99, ami 9 darab szám.

Alternatíván, minden fix tízes helyiértékre legfeljebb egy megoldás lehet, hiszen az egyes helyi érték változtatásakor számjegyek összege annyival nő, amennyi a számjegyek szorzata.

D4. Áronnak van egy bangladesi és egy német zászlója, melyek téglalap alakúak, és mindkettő rövidebbik oldalának hossza 48 cm. Németország zászlájának oldalaránya 2 : 3, Bangladesé pedig 3 : 5. Banglades zászlója egy zöld alapon piros kör. Áron az asztalán egymásra helyezte ezt a két zászlót úgy, hogy a rövidebb oldalai illeszkedtek egymásra. Meglepődve vette észre, hogy a bangladesi zászlón lévő kör középpontja pont a német zászló középpontjára került. Hány centiméterrel van elcsúsztatva Banglades zászlóján a kör középpontja a zászló középpontjához képest?



D
kategória

Megoldás: Áron német zászlójának oldalaránya $2 : 3$, rövidebb oldala 48 centiméter hosszú, így hosszabb oldala $48 \times \frac{3}{2} = 72$ centiméter hosszú. Hasonlóan a bangladesi zászlójának a rövidebb oldala szintén 48 centiméter hosszú, oldalainak aránya $3 : 5$, ezért ennek a hosszabb oldala $48 \times \frac{5}{3} = 80$ centiméter hosszú. Így a német zászló középpontja a rövidebb oldalaktól pontosan $72 : 2 = 36$ centiméterre van. Tudjuk, hogy a bangladesi zászló piros körének középpontja pont erre a pontra esik rá, azaz ez is 36 centiméterre van a rövidebb oldaltól. Míg a bangladesi zászló középpontja a rövidebb oldalától $80 : 2 = 40$ centiméterre van, hiszen ennek 80 centiméter a szélessége, tehát a bangladesi kör $40 - 36 = 4$ centiméterrel van eltolva a zászló középpontjához képest.

D5. Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három kancsó 20 fokos teája van. Gandalf a három kancsó teát úgy szeretné felszolgálni, hogy mindhárom 80 fokra van melegítve. Gandalf egy időben két kancsó teát tud egyszerre melegíteni. Ha egy kancsó teát éppen melegít, akkor annak a hőmérséklete percenként 3 fokot emelkedik, ha pedig nem melegíti, akkor percenként 1 fokot csökken. Legalább hány percre van szüksége Gandalfnak ahhoz, hogy a három kancsó egyszerre legyen legalább 80 fokos?

Egy kancsó tea tetszőleges hőmérsékletre lehűlhet vagy felmelegedhet.

Megoldás: Nézzük meg, hogy egy perc alatt a három kancsó hőmérsékletének összege hogyan változik. Két kancsót melegít, a harmadikat pedig nem, ez alapján két kancsó tea hőmérséklete 3 fokkal nő egy kancsó teának pedig 1 fokkal csökken. Összeadva $3 + 3 - 1 = 5$, azaz 1 perc alatt 5-tel tudja Gandalf növelni az összeget. Kezdetben a három hőmérséklet összege $3 \cdot 20 = 60$, a folyamat végén pedig $3 \cdot 80 = 240$. E két szám különbsége 180, ez alapján legalább $\frac{180}{5} = 36$ percet kell melegítéssel töltenie. Lássuk be, hogy ez tényleg megvalósítható! Ha Gandalf ugyanannyi időt fordít bármelyik kancsópárra, akkor ez történik: 12 percig melegíti az első és második kancsót, 12 percig az első és harmadik kancsót, és 12 percig másodikat és harmadikat. Ekkor minden kancsó teára igaz, hogy 24 percig melegedett és 12 percig hűlt, tehát a mostani hőmérsékletük $20 + 24 \cdot 3 - 12 = 20 + 72 - 12 = 80$. Legalább 36 percre van szüksége Gandalfnak.

D6. Hány olyan perc van egy nap folyamán, amikor a digitális órán négy egymást követő számjegy látszik?

Az óra éjfélkor 23:59-ről 00:00-ra vált. Például a 21:03 ilyen perc, de a 09:12 nem az.

Megoldás: Az első számjegy csak a 0, 1, 2 számok valamelyike lehet, mivel egy nap 24 óra van. Így a négy egymást követő számjegy vagy a 0, 1, 2, 3 vagy az 1, 2, 3, 4 vagy pedig a 2, 3, 4, 5 lehet csak. Ha a 0, 1, 2, 3 számok állnak az órán, akkor az első számjegy nem lehet hármas, viszont más megkötés nincsen, mivel a második számjegy tetszőleges lehet a 0, 1, 2, 3 közül, akármi is áll az első helyen és a percek mindkét helyén bármelyik számjegy állhat. Így ez $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ lehetőség. Ha az órán az 1, 2, 3, 4 számjegyek szerepelnek, akkor az első helyen csak az 1, 2 valamelyike állhat. 1 esetén a mögötte álló számjegyekre ismét nincs más megkötés az előbbiekhöz hasonlóan, így ez $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset, míg ha 2 áll elől, akkor mögötte 4 nem állhat, mivel 24-gyel már nem kezdődik óra. Ekkor mögötte is csak két számjegy állhat, azaz ez $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ eset. Végül ha az órán a 2, 3, 4, 5 számjegyek állnak, akkor az első számjegy csak 2 lehet, mögötte pedig csak a 3 állhat. Így ez két lehetőség: 23 : 45 és 23 : 54. Összesen $18 + 6 + 4 + 2 = 30$ perc van egy nap folyamán, ami teljesíti a feladat feltételeit.

D7. Zsuzsi és Zsófi a kínai nagy falon sétáltak. Zsuzsi kíváncsi volt, hogy mi Zsófi házszáma, ezért megkérdezte tőle. Zsófi nem árulta el, de azért azt elmondta, hogy a házszámnak pontosan hat pozitív osztója van, amik közül az egyik a számjegyeinek összege, továbbá Zsófi utcájában a házak 1-től 60-ig vannak számozva. Hány olyan szám van, amely a fenti információk alapján lehetne Zsófi házszáma?



D
kategória

Megoldás: Mivel $6 = 2 \cdot 3$, ezért pontosan 6 osztója úgy lehet egy számnak, hogy a prímtényező felbontásában vagy egyetlen prím szerepel ötödik hatványon vagy két prím szerepel, az egyik első, a másik második hatványon (ekkor lesz $2 \cdot 3 = 6$ osztó). Az előbbi esetben a házszám p^5 alakú, ahol p egy prím. Ha $p \geq 3$, akkor $p^5 \geq 3^5 = 243$, de csak 60-ig vannak az utcában számozva a házak. Így csak a $p = 2$ eset merülhet fel. Ekkor a házszám $2^5 = 32$ lenne, viszont ezt nem osztja a $3 + 2 = 5$, ami a számjegyeinek összege. Így ilyen alakú számból nincs megfelelő. Utóbbi esetben pedig a házszám $q^2 \cdot r$ alakú, ahol q és r különböző prímelek. Ha $q \geq 7$, akkor $q^2 \cdot r \geq 7^2 \cdot 2 = 98$, így ez sem lehetséges, mert nagyobb lenne 60-nál. Tehát q csak 2, 3, 5 valamelyike lehet. Mivel $q^2 \cdot r \leq 60$ -nak teljesülnie kell, ezért ha $q = 2$, akkor $r \leq \frac{60}{4} = 15$, ha $q = 3$, akkor $r \leq \frac{60}{9} < 7$ és ha $q = 5$, akkor $r \leq \frac{60}{25} < 3$ és minden esetben tudjuk, hogy $r \neq q$ is prím. Tehát a következő esetek maradtak $\{q, r\}$ értékre: $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 11\}$, $\{2, 13\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 2\}$. Azaz a házszám lehet 12, 20, 28, 44, 52, 18, 45, 50. Ezek közül a 28 nem osztható $2 + 8 = 10$ -zel, a 44 nem osztható $4 + 4 = 8$ -cal és az 52 nem osztható $5 + 2 = 7$ -tel, de a többi számra teljesül, hogy oszthatóak a számjegyeik összegével. 5-féle lehet Zsófi házszáma, mégpedig a 12, 20, 18, 45, 50 számok valamelyike.

D8. Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz, hogy a párbajozást gyakorolják. Hányféleképpen teheti ezt meg?

Két párbaállítást akkor tekintünk különbözőnek, ha valakinek más a párja az egyikben, mint a másikban.

Megoldás: Az első párbajozó párt $\binom{10}{2} = 45$ -féleképpen választhatja ki Piton professzor. A megmaradó 8 diákból a második párbajozó párt $\binom{8}{2} = 28$ -féleképpen választhatja ki. Hasonlóképpen a harmadik párt $\binom{6}{2} = 15$ -féleképpen, a negyedik párt $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen. Ekkor már csak 2 diák maradt ki, ők egymással alkotnak párt. Viszont most minden lehetőséget többször számoltunk, mert a végső beosztásban a párok kiválasztásának sorrendje nem számít. Öt elemet $5! = 120$ -féleképpen lehet sorba állítani, ez alapján minden lehetőséget 120-szor számoltunk. Ezért a korábban kapott értéket osszuk le 120-szal. Tehát a megoldás $\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{5!} = \frac{45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{120} = 945$.

D9. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?

Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek.

Megoldás: Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok közt mind a négy témakör egyszer szerepel és az 1-es feladat algebra, így a maradék három feladathoz a maradék három témát $3! = 6$ -féleképpen tudjuk kiválasztani. Az első és a negyedik feladatok könnyűek, a második és ötödik feladatok közepesek, melyek közül mind 3-3 szerepel az előzetes feladatok közül. Mivel ezek a feladatok különböző témakörökből vannak, ezért egymástól függetlenül választható ki, hogy a három lehetőség közül melyik legyen az adott feladat. Így ezeket a feladatokat $3^4 = 81$ -féleképpen választhatjuk ki. Még hátra van a 3-as és a 6-os feladat. Ezek témája nem egyezhet az adott napi feladatsor korábbi feladatainak témájával, így mindkettőre két-két témalehetőség van (és ezek különbözőek is lesznek szükségszerűen a korábbi 4 feladat témája miatt). Mindkét feladat a nehéz feladatok közül való és mivel témájuk különbözik, ezért egymástól függetlenül két-két lehetőség van kiválasztani a konkrét feladatot az előzetes nehezek közül. Így a 3-as és 6-os feladatokra további $2^4 = 16$ lehetőség van. A felsorolt kiválasztások egymástól függetlenek, így az esetek szorzószorzódnak, azaz $6 \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 6 \cdot 81 \cdot 16 = 6^5 = 7776$ -féle feladatsort állíthat össze a zsűri.



D
kategória

D10. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalánál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, négyzetszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?

Juliska könyvének az oldalai 1-től n -ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszakapjuk ugyanazt a számot.

Megoldás: A legkisebb lehetséges számpár a 9-10, de ezek nem tartalmaznak 5-ös számjegyet, így nem lehet itt nyitva a könyv. A kétjegyű palindromszámok a 11-gyel osztható számok 99-ig, de ezek közül csak a 44, 55 és 66 melletti számokban szerepel 5-ös számjegy, de ezek egyike sem négyzetszám. Így legalább háromjegyű mindkét oldalszám. Nézzük meg a 100 és 399 közti palindromszámokat. Ezek $\overline{1a1}$, $\overline{2b2}$ és $\overline{3c3}$ alakúak, így a mellettük álló számok $\overline{1a0}$, $\overline{1a2}$, $\overline{2b1}$, $\overline{2b3}$ és $\overline{3c2}$, $\overline{3c4}$ alakúak. Ezek közt csak akkor szerepel 5-ös számjegy, ha $a, b, c = 5$. Viszont ekkor a középső számjegy páratlan mindkét oldalon, így ezek a lehetőségek is kiestek. Azaz az oldalszámok közt van legalább 400 nagyságú. Nézzük meg innentől kezdve a négyzetszámokat: $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $24^2 = 576$, $25^2 = 625$. A 400, 441 mellett nincsenek 5-ös jegyet tartalmazó számok, míg az 5-össel kezdődő számok biztosan nem csupa páros jegyűek, így a 484 és a 625 maradt lehetőségnek. A 484-485 és a 625-626 számok valóban teljesítik a feltételeket, így Juliska könyve legfeljebb 625 oldalas lehet, hogy egyértelmű legyen Jancsi számára az oldalszám. Legfeljebb 625 oldalas Juliska könyve.

D11. Adott egy O középpontú egysugarú k kör és egy e érintője. Legyen f egy olyan egyenes, ami merőleges e -re és k -t két különböző pontban metszi. Legyenek f -nek az e -vel, illetve k -val való metszéspontjai rendre E , A és B , ebben a sorrendben elhelyezkedve f -en. Legyen az e és BO egyenesek metszéspontja I . Legyen g az I -ből k -hoz húzott e -től különböző érintő, az érintési pontja legyen J . Tudjuk, hogy g merőleges e -re. Legyen továbbá a BI és az AJ egyenesek metszéspontja H , valamint legyen az AH szakasz hossza x . Mennyi $(x^2 - 4)^2$?

Megoldás: Legyen K az e érintési pontja k -val. Mivel az I -ből húzott két érintő merőleges egymásra, ezért $KIJO$ egy négyzet, hiszen K és J csúcsánál is derékszög van, hiszen azok érintési pontok. Legyen L az OJ és EB egyenesek metszéspontja. Mivel OI a $KIJO$ négyzet egy átlója, ezért $IOJ \sphericalangle = BOL \sphericalangle = 45^\circ$. Viszont, mivel O a kör középpontja, és AB egy húr, ezért LO felezi a $BOA \sphericalangle$ -t, valamint L felezi BA -t. Ebből $BOA = 90^\circ$, amiből kapjuk, hogy $|BA| = \sqrt{2}$. Viszont mivel L felezi BA -t ezért $|AL| = |BL| = |OL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ebből kapjuk, hogy $|JL| = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ekkor Pithagorasz tételből

$$|AJ| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)}$$

Vegyük észre, hogy IJ és BA párhuzamosak, amiből következik, hogy HIJ és HBA háromszögek hasonlóak egymással, és a hasonlóságot felírva kapjuk, hogy $\frac{|AH|}{|HJ|} = \frac{|BA|}{|IJ|} = \frac{\sqrt{2}}{1}$. Ekvivalens azzal, hogy

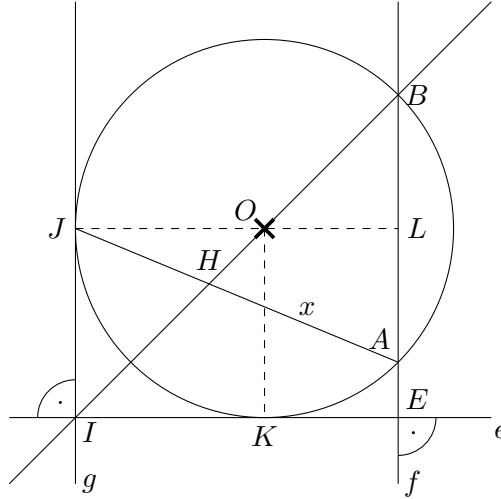
$$\frac{|HA|}{|AJ|} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \text{ vagyis } |AH| = \sqrt{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}} \text{ A gyökön belüli tört számlálóját és nevezőjét is megszorozva } \sqrt{2}-1\text{-el, } \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$(x^2 - 4)^2 = 8$$



D
kategória



D12. A félvér táborban 12 istálló van, melyek egy 3×4 -es négyzetrács négyzeteiként helyezkednek el. Kheirón, a tábor vezetője azt a feladatot adta Annabeth Chase-nek, hogy ossza fel a 12 istálló rendberakását Percy, Grover és Thalia között úgy, hogy mindhárman 4 istállót rakjanak rendbe. Hányféle beosztást készíthetett Annabeth, ha mindhárman összefüggő területeket kaptak?

Két beosztást akkor tekintünk különbözőnek, ha volt olyan istálló, ahova mást osztott be.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a 12 istállóból a négy közül amelyek a sarkokban helyezkednek el, a szemközti takarítására különböző táborozókat kellett beosztani, hiszen a szemközti sarkokban lévő két istállóhoz nincs két olyan istálló, mellyel ők egybefüggő területet alkotnának. Mivel a beosztásokban a három táborozó közül bármely ugyanúgy hozzárendelhető tetszőleges 4 istállóból álló összefüggő területhez, így a keresett beosztások száma megegyezik a 3×4 -es négyzetrács három egyenlő területű összefüggő részre osztásának számának hatszorosával, hiszen egy olyan felosztáshoz 6 beosztás rendelhető aszerint, hogy az egyes részekhez mely táborozót rendeljük.

Számoljuk hát meg az ilyen felosztások számát. Jelöljük A-val a bal felső mezőt tartalmazó területet, B-vel a jobb alsó mezőt tartalmazó területet, és C-vel az egyiket sem tartalmazót. Ekkor a bal alsó és jobb felső nem lehet azonos a fentebbiek miatt, így a négy sarkot a három rész a következőképp tartalmazhatja:

A			B	A			C	A			A
A			B	A			B	B			B

Első eset

Második eset

Harmadik eset

A			C	A			A	A			B
B			B	C			B	C			B

Negyedik eset

Ötödik eset

Hatodik eset



D

kategória

Ha egy sornak a bal és a jobb oldali mezője azonos részbe kerül, annak a sornak teljes egészében az adott résznek kell lennie, különben nem kerülhetne a két szélső mező onnan egy négy mezőből álló összefüggő területre. Így a harmadik eset csak 1 féleképpen, akkor lehetséges, ha a sorok alkotják az egyes területeket.

A négyes és ötös esetek középpontos szimmetria miatt ugyanannyi lehetséges felosztást adnak. A négyes esetet megnézve az alsó sort beírva láthatjuk, hogy a fennmaradó 2×4 -es négyzetrácson újból a szemközti sarkoknak különböző területbe kell esniük, azonban B-k már nem lehetnek, így könnyen látható, hogy három lehetőség van a fennmaradó részt megfelelő A és C területekre osztani. Így a négyes és ötös eset esetén összesen 6 lehetséges felbontás van.

A			C
A			C
B	B	B	B

A kettes és hatos eset szintén a középpontos szimmetria miatt ugyanannyi lehetséges felosztást ad. A kettes esetenél könnyű megmondolni, hogy ha az első oszlop középső mezője nem A lenne, akkor az a terület nem tartalmazhatná a két baloldali sarkot úgy, hogy négy mezőt tartalmazzon és összefüggő legyen, így azt tartalmaznia kell. Ekkor három részesetre bomlik az eset aszerint, hogy mely mező tartozik még az A területhez, azonban az alsó és a felső sorban lévő részesetek a vízszintes tükrötengelyre való szimmetria miatt újfent azonos számú felosztást adnak. Legyen az az első részeset, ahol A az első oszlop mellett a második oszlop legfelső mezőjét tartalmazza. Ekkor ezen részesetre a lehetséges felosztások számát kétszerezni fogjuk és a felső helyett a második oszlop alsó mezőjét tartalmazó részesetet nem számoljuk.

Az első részesetben az alsó sorban balról a második mező a jobb felsővel nem lehet egy összefüggő 4 mezőt tartalmazó területen, így az csak B lehet, és fentebbiekhez hasonlóan az így beírt két B közötti mező is a B terület része. Így könnyen látható, hogy az első részesetre kettő lehetséges felbontás van.

A	A		C
A			
A			B
A			C
A	A		
A			B

A második részesetben az előző indokláshoz hasonlóan a második oszlopban a fenti mezőnek C-nek, a lentinek pedig B-nek kell lennie, és ugyanígy a harmadik oszlopban is. Így a második részesetben két lehetséges felbontás van. Tehát a kettes és hatos esetek összesen $2 \cdot (2 \cdot 2 + 2) = 12$ lehetséges felbontást adnak.

Az első esetben a fentiekhez hasonlóan a középső sor bal és jobb szélső mezője rendre A és B. Ekkor könnyű látni, hogy a középső sor két középső mezője csak C lehet, így 4 lehetséges felosztás van az első esetben.

Összesen tehát 23 olyan felosztása van a 3×4 -es négyzetrácsnak, mely három összefüggő, 4-4 mezőt tartalmazó részre osztás. A kért szám ennek a hatszorosa, így a válasz 138.

D13. Töltsétek ki a táblázat mezőit az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata?



D
kategória

	9	11	8	9	10
10		6			5
7					
			5		
		3			1
					6

Megoldás:

A harmadik sor mellett a 7 áll, azaz ott bármely két egymás melletti szám összege legfeljebb 7. Tehát a 6 mellett csak az 1 állhat, tehát a 6 a sor egyik szélén áll. Mivel a jobb oldali (balról hatodik) oszlopban már van 6-os, így a harmadik sorban a 6 csak a bal szélre kerülhet, és az 1-es közvetlen mellé.

Mivel ebben a sorban a szomszédosak összege legfeljebb 7, így az 5 mellé csak az 1 és a 2 kerülhet. Mivel a balról harmadik oszlopban már van 5-ös, így a harmadik sorban nem kerülhet az 5 az 1 mellé. Tehát az 5-nek csak egy szomszédja lehet, azaz a jobb szélső mezőbe kerül, mellé pedig a 2.

Ekkor a harmadik sorból már csak a 3 és a 4 hiányzik. Mivel a balról harmadik oszlopban két szomszédos szám összege legfeljebb 8, így az ebben az oszlopban lévő 5-ös fölött nem állhat a 4, csak a 3. Így kitöltöttük a harmadik sort.

	9	11	8	9	10
10		5			
7	6	1	3	4	2
			5		6
		3			1
					6

Tudjuk, hogy a második oszlopban van két szomszédos szám, melyek összege 11, ez csak úgy lehet, ha a 6 és az 5 egymás melletti mezőben van. Mivel a 6 alatti mező már foglalt, így az 5 a második oszlop legfelső mezőjében van.

Mivel minden oszlopban pontosan egy 6-os van, így a (fentről) negyedik sorban a 6-os vagy a negyedik, vagy az ötödik helyen áll. Ha a negyedik helyen állna, akkor a negyedik oszlopban egymás alá kerülne egy 4-es és egy 6-os, ami ellentmond azzal hogy ebben az oszlopban a szomszédos mezőben a számok összege legfeljebb 9. Tehát a 6 az ötödik helyen áll.

A második sorban a 4 csak az első vagy a harmadik helyre kerülhet. Ha az első helyen lenne, akkor az első oszlopban egymás mellett lenne a 4 és a 6, ami nem felel meg annak a feltételnek, hogy nincs két szomszédos, aminek az összege nagyobb 9-nél. Tehát a 4 a második sor harmadik helyére kerül.

Ekkor a harmadik oszlopban a 6 csak a fentről első vagy a hatodik helyen állhat, hiszen minden más sorban már van hatos. Mivel ebben az oszlopban a szomszédos mezőkben a számok összege legfeljebb 8, így a hatos nem kerülhet az első helyre a 4-gyel szomszédos mezőre. Tehát a 6 a legalsó (hatodik) helyre kerül. Ekkor ki tudjuk tölteni a harmadik oszlopot: itt két üres mező van, amikre az 1 és 2 számokat írjuk. Mivel a fentről ötödik sorban már van 1, így oda kerül a 2 és az legfelső mezőbe az 1.

Hogy minden számjegy minden sorban és oszlopban csak egyszer szerepeljen, az utolsó 6 az első sor negyedik helyén van.

	9	11	8	9	10
10		6			5
7	6	1	3	4	2
			5		
		3			1
					6

	9	11	8	9	10
10		5	1	6	
7	6	1	3	4	2
			5		6
		3	2		1
			6		



D
kategória

	9	11	8	9	10	
		5	1	6		
10	2	6	4	3	5	1
7	6	1	3	4	2	5
			5		6	
	4	3	2	5	1	6
			6			

Ekkor már csak két szám hiányzik az ötödik sorból, a 4 és az 5. Mivel a negyedik oszlopban már van 4-es, így az ötödik sor negyedik helyére kerül az 5 és az első helyére a 4.

A negyedik oszlopban van két szomszédos szám, melyek összege 9. Mivel a 4, 5 és 6 közül semelyik kettő nem szomszédos, ezért ez csak akkor fordulhat elő, ha a 3 a 6 mellé kerül: a második sor negyedik helyére. Ekkor a második sorból már csak a 2 hiányzik, az első helyről.

Az első oszlopban három üres mező van. Az 5 csak a legalsó helyre kerülhet, a többi sorban már van 5-ös. A maradék két helyből az 1 csak a fentről negyedik helyen lehet, mert az első sorban már van 1. Így a bal felső sarokba a 3 kerül.

Ekkor már ki tudjuk tölteni a negyedik oszlopot: onnan az 1 és a 2 hiányzik. Az 1 csak a legalsó mezőben lehet, mert a másik üres mező sorában (a negyedik sorban) már van 1.

	9	11	8	9	10	
	3	5	1	6		
10	2	6	4	3	5	1
7	6	1	3	4	2	5
	1		5	2	6	
	4	3	2	5	1	6
	5		6	1		

	9	11	8	9	10	
	3	5	1	6	4	2
10	2	6	4	3	5	1
7	6	1	3	4	2	5
	1	4	5	2	6	3
	4	3	2	5	1	6
	5	2	6	1	3	4

A második oszlopban két üres mező van, ahonnan a 2 és 4 számok hiányoznak. A 2 csak a legalsó mezőbe kerülhet, mert a negyedik sorban már van 2. Így a második oszlopba a 4 a negyedik sorba kerül.

A negyedik sor utolsó mezőjébe a 3 kerül, hisz már csak ez hiányzik a sorból. Az utolsó oszlopban van két szomszédos szám melyek összege 10, azaz a hiányzó 4-es a 6 szomszédjába a bal alsó sarokba kerül. Ekkor egy szám hiányzik az utolsó oszlopból: egy 2 a legfelső mezőből. Ekkor már csak a legfelső és legalsó sorból hiányzik egy-egy szám, amik egyértelműen kitölthetők az ábra szerint.

A táblázat sarkaiba a 2, 5, 4 és 3 számok kerülnek. Ezek szorzata 120.

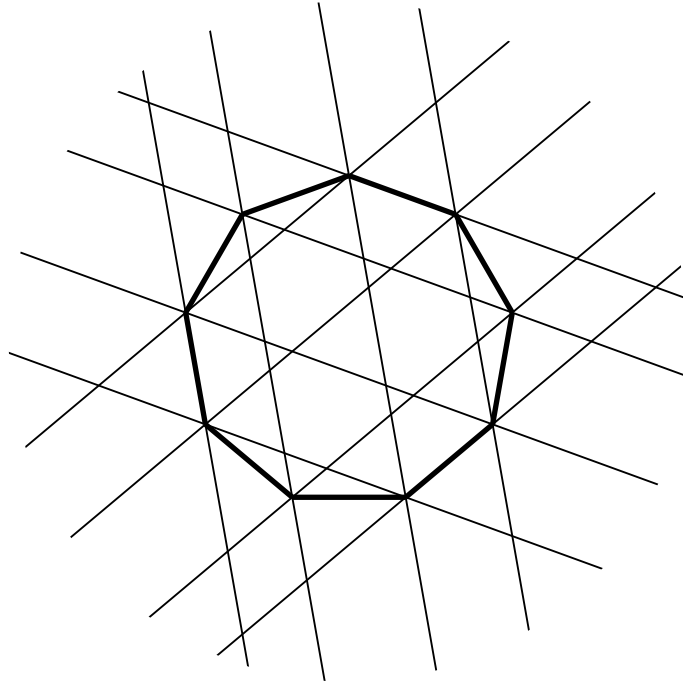
D14. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek?

Megoldás: Mivel 9 páratlan, ezért a kilencszög minden átlója párhuzamos valamelyik oldallal. Így kategorizálhatjuk a szabályos háromszögeket aszerint, hogy melyik oldalakkal párhuzamosak az oldalai. Világos, hogy ha a három átló szabályos háromszöget zár be, akkor a szabályos 9-szög velük párhuzamos oldalai is, ez pedig a forgásszimmetria miatt pontosan akkor teljesül, ha minden harmadik oldalt választjuk ki, amit 3-féleképpen lehet megtenni, így 3 kategória lesz, és a szimmetria miatt mindegyikben ugyanannyi eset.

Ekkor mindhárom irány esetén az azzal párhuzamos átlót 4-féleképpen lehet kiválasztani, ami $4^3 = 64$ lehetőség. Ebből azonban még le kell vonni azokat az eseteket, amikor a három egyenes nem határoz meg szabályos háromszöget, vagyis egy ponton mennek át. A megoldás végén szereplő ábráról leolvasható, hogy a szabályos kilencszög átló/oldal egyenesei közül azok, amelyek a megfelelő párhuzamossági osztályokban vannak, három csak akkor mehet át egy ponton, ha ez a pont csúcsa a kilencszögnek. Így csak azokat az eseteket kell nézni, amikor a három egyenes egy csúcsban találkozik. Ekkor a csúcs, amiben találkoznak (ami már egyértelműen meghatározza a három átlót) biztosan végpontja valamelyik oldalnak, amivel párhuzamos a háromszög valamelyik oldalegyenesese, ellenkező esetben az egyik oldallal szemben lenne, de akkor nem mehetne át rajta ezen oldallal párhuzamos egyenes. Ezen 6 csúcsban viszont mind találkozhat 3 átló, amik párhuzamosak a megadott irányokkal, ezért 6 elfajuló eset van, vagyis $64 - 6 = 58$ esetben határoznak meg szabályos háromszöget. Így az összes lehetőség száma: $3 \cdot 58 = 174$.



D
kategória



D15. Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű a legkisebb olyan pozitív egész n , amelyre $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$?

Megoldás: Ismert, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege is. Tehát ahhoz, hogy $\frac{2}{9}t(n)$ egész legyen, n -nek kilencel oszthatónak kell lennie, azaz $2n$ is osztható 9-cel, tehát $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$ is. Ha $\frac{2}{9}t(n)$ osztható kilencel, akkor ennek a fele, azaz $\frac{1}{9}t(n)$ is (hiszen ugyanannyi 3-as prímtényezőt tartalmaz), azaz $t(n)$ osztható $9 \cdot 9 = 81$ -gyel, azaz $t(n)$ legalább 81.

Vizsgáljuk meg, hogy hogy viszonyul egymáshoz $2t(n)$ és $t(2n)$ helyiértékenként. Amennyiben n kettővel való szorzása során egy adott helyiértéken nem történik tízesátlépés, abban az esetben x -ből $2x$ lesz, így itt ugyanannyi adódik hozzá $2t(n)$ -hez és $t(2n)$ -hez. Ha valamelyik helyiértéken tízesátlépés van, akkor x -ből $2x - 10$ lesz, és hozzáadunk 1-et a következő helyiértékhez, azaz minden tízesátlépés $(10+x) - (1+x) = 9$ -cel csökkenti $t(2n)$ értékét $2t(n)$ -hez képest. Képlettel felírva $t(2n) = 2t(n) - 9 \cdot \#_t$, ahol $\#_t$ jelöli a tízesátlépések számát n kettővel való szorzása során.

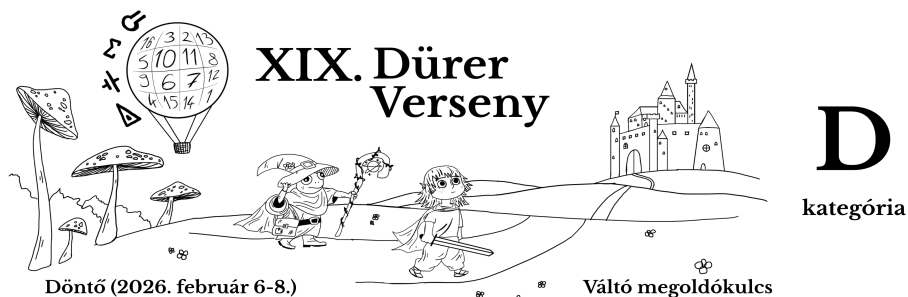
Egy helyiértéken pontosan akkor fog tízesátlépés történni, ha ott legalább 5 szerepel, függetlenül a kisebb helyiértékektől. Tegyük fel, hogy $t(n) = 81$, ekkor ahhoz, hogy a feladat feltételei teljesüljenek $t(2n)$ -nek $\frac{2}{9} \cdot 81 = 18$ -nak kell lennie, azaz $\frac{2 \cdot 81 - 18}{9} = 16$ tízesétlépésnek kell történnie a 2-vel való szorzás során, azaz n legalább 16 jegyű. A 16 jegyű számok között már található megfelelő n , például $n = 5555555555555556$ esetén $2n = 1111111111111112$, amire $t(n) = 81$ és $t(2n) = 18$.

Ha $t(n) \neq 81$, akkor mivel $t(n)$ osztható 81-gyel, legalább 162 értéke, tehát n legalább $\frac{162}{9} = 18$ jegyű, ami már több, mint 16, azaz a feladat kérdésére 16 a válasz.

D16. Az ábrán látható hét négyzetbe szeretnénk valamilyen sorrendben beírni az $1, 2, \dots, 7$ számokat úgy, hogy a feltüntetett egyenlőtlenségek mind igazak legyenek. Minden négyzetbe egy számot írhatunk be és minden számot pontosan egyszer használhatunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

$$\square < \square > \square < \square > \square < \square > \square$$

Megoldás: A 7-es szám a 2., 4. vagy 6. helyre fog kerülni.



Ha a 4. helyre kerül, akkor $\binom{6}{3} = 20$ -féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik szám melyik oldalra kerül. Mindkét oldalon a legnagyobb szám kerül középre, a maradék két számot pedig 2-2-féleképpen lehet beírni, így összesen $20 \cdot 2 \cdot 2 = 80$ lehetőség van.

Ha a 2. helyre kerül, akkor tőle balra 6-féle szám lehet. A maradék 5 számból a legnagyobb 2-féle helyre kerülhet. Az így elválasztott 1 mezőre 4-féle szám kerülhet, a maradék három számot pedig az előzőhöz hasonló módon 2-féleképpen lehet befejezni, így összesen $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 96$ lehetőség van.

Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha a 6. helyre kerül a 7-es, így összesen $80 + 96 + 96 = 272$ lehetőség van.