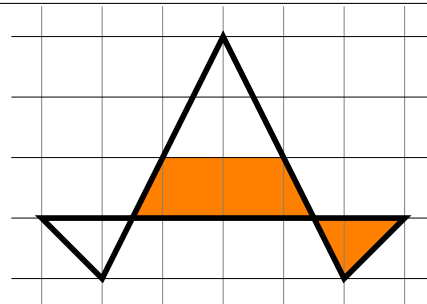




E

kategória

E-1. Az ábrán látható kalapban hány cm^2 a narancsszínű rész területe, ha egy kis négyzet területe 4 cm^2 ? (3 pont)



E-2. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?

A kétjegyű pozitív egész számok a 9-nél nagyobb és 100-nál kisebb egészek.

(3 pont)

E-3. Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három kancsó 20 fokos teája van. Gandalf a három kancsó teát úgy szeretné felszolgálni, hogy mindhárom 80 fokra van melegítve. Gandalf egy időben két kancsó teát tud egyszerre melegíteni. Ha egy kancsó teát éppen melegít, akkor annak a hőmérséklete percenként 3 fokot emelkedik, ha pedig nem melegíti, akkor percenként 1 fokot csökken. Legalább hány percre van szüksége Gandalfnak ahhoz, hogy a három kancsó egyszerre legyen legalább 80 fokos?

Egy kancsó tea tetszőleges hőmérsékletre lehűlhet vagy felmelegedhet.

(3 pont)

E-4. Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz, hogy a párbajozást gyakorolják. Hányféleképpen teheti ezt meg?

Két párbaállítást akkor tekintünk különbözőnek, ha valakinek más a párja az egyikben, mint a másikban.

(3 pont)

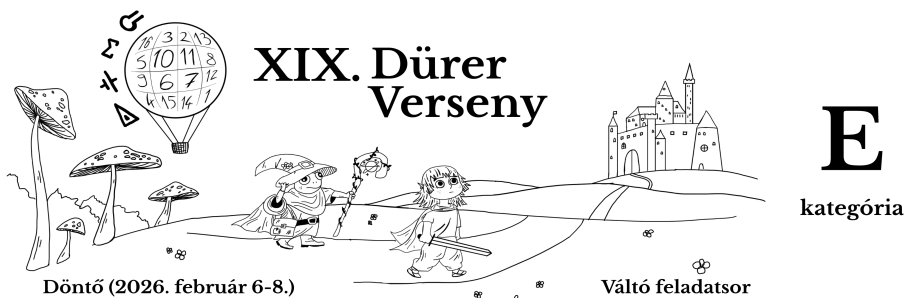
E-5. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?

Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek.

(4 pont)



E-6. Boti, a bébi bástya egy minden irányban végtelen sakktáblán él. Boti minden éjszaka alva jár, ami során mindig átmászik egy oldalszomszédos mezőre, arra viszont nem emlékszik hogy melyikre. Minden délben megmondja neki a sakk királynője, hogy az aktuális mezőjének a négy oldalszomszédján hányszor járt eddig. Ezt a négy számot mindig véletlenszerű sorrendben mondja, tehát Boti nem tudja, hogy közülük melyik szám melyik mezőre vonatkozik. Boti boldog egy napon, ha biztosan tudja, hogy olyan mezőn van, ahol már korábbi napon is volt. Leghamarabb hányadik napon lehet boldog Boti?

Boti először az első és második nap közti éjszakán jár alva, napközben nem változtat helyet és emlékszik arra, hogy a korábbi napokon miket mondtak neki. (4 pont)

E-7. Beni rajzol egy 7 élű valahány csúcsú összefüggő egyszerű gráfot. Az élre ráírja az $1, 2, \dots, 7$ számokat úgy, hogy minden számot egy élre ír és minden élre egy szám kerül. Ezután Gergő rajzol egy másik gráfot, melynek csúcsai az $1, 2, \dots, 7$ számoknak felelnek meg, és akkor köt össze kettőt, ha a hozzájuk tartozó élnek Beni gráfjában van közös csúcsa. Hányféle lehet ezek alapján Gergő gráfja, ha tudjuk, hogy nincs benne kör?

Két gráf különböző, ha van két csúcsuk, melyek az egyikben össze vannak kötve, a másikban pedig nem. Egy gráf akkor egyszerű, ha nem tartalmaz se többszörös élt, se hurokét. (4 pont)

E-8. Egy varázslónak kezdetben van egy 1 koncentrációjú oldata kék, és egy 0 koncentrációjú oldata piros üvegben. A varázsló két, különböző színű üvegben lévő oldat segítségével képes a semmiből egy új oldatot varázsolni egy üres kék vagy piros üvegébe, aminek koncentrációja a két oldat koncentrációjának átlaga. Legfeljebb mennyi lehet 15 varázslat után a varázsló kék üvegeiben lévő oldatok koncentrációinak összege? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Az oldatok nem tölthetők át más üvegbe. Amikor a varázsló új oldatot varázsol, a két felhasznált üveg színe és tartalma nem változik. (4 pont)

E-9. Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e érintője. Legyen f egy olyan egyenes, ami merőleges e -re és k -t két különböző pontban metszi. Legyenek f -nek az e -vel, illetve k -val való metszéspontjai rendre E , A és B , ebben a sorrendben elhelyezkedve f -en. Legyen az e és BO egyenesek metszéspontja I . Legyen g az I -ből k -hoz húzott e -től különböző érintő, az érintési pontja legyen J . Tudjuk, hogy g merőleges e -re. Legyen továbbá a BI és az AJ egyenesek metszéspontja H , valamint legyen az AH szakasz hossza x . Mennyi $(x^2 - 4)^{2?}$ (5 pont)

E-10. Legyen $a_1 = 3$, és minden $n \geq 1$ esetén legyen $a_{n+1} = 3^{a_n}$. Az $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ számok közül hány végződik 7-es számjegyre? (5 pont)

E-11. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek? (5 pont)



E

kategória

E-12. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalnál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, hatványszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?

Juliska könyvének az oldalai 1-től n -ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszakapjuk ugyanazt a számot, hatványszámoknak pedig azon pozitív egészeket, melyek előállnak a^b alakban, ahol a és b pozitív egészek és $b \geq 2$. (6 pont)

E-13. Egy 12 fős bűnbanda egy kerek asztal körül tart megbeszélést. Mindenki maga elé néz, vagy kölcsönösen beszélget valamelyik szomszédjával. Hányféleképpen nézhet ki a megbeszélés?

Két megbeszélést akkor tekintünk különbözőnek, ha van két olyan ember, akik az egyik esetben beszélgetnek egymással, a másikban nem. (6 pont)

E-14. Töltsétek ki a táblázat mezőit az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata? (6 pont)

	9	11	8	9	10
10		6			5
7					
	3			1	6

E-15. Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű a legkisebb olyan pozitív egész n , amelyre $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$? (6 pont)

E-16. Mógus professzor megkérte Harryt, hogy gondoljon 4 különböző pozitív egész számra, majd írja fel egy lapra az összes nem üres részhalmazukban a számok összegét és ne mutassa meg. Ezután Harry összeszorozta a papíron szereplő 15 számot, azonban mielőtt Harry elmondta volna az eredményt, Mógus professzor mondott egy olyan pozitív egész számot, amelyről biztosan tudja, hogy osztja ezt a szorzatot. Mi a legnagyobb szám, amit Mógus professzor mondhatott? **Válaszként a megoldás 10000-es maradékát adjátok meg!** (6 pont)