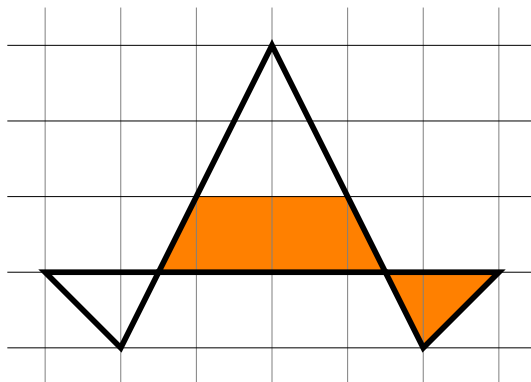




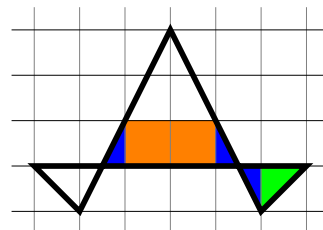
E
kategória

E1. Az ábrán látható kalapban hány cm^2 a narancsszínű rész területe, ha egy kis négyzet területe 4 cm^2 ?



Megoldás:

Szimmetria miatt a három kék háromszög területe egyenlő. Továbbá a szimmetriából az is következik, hogy egy ilyen kis háromszög magassága egy kis négyzet oldala, az alapja pedig a fele, tehát a területe egy kis négyzet területének egynegyede, 1 cm^2 . A zöld háromszög egy kis négyzet fele, tehát 2 cm^2 területű. Összesen $2 \cdot 4 \text{ cm}^2 + 1 \cdot 2 \text{ cm}^2 + 3 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^2$ területű a narancsszínű rész.



E2. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?

A kétjegyű pozitív egész számok a 9-nél nagyobb és 100-nál kisebb egészek.

Megoldás: Legyen a keresett kétjegyű szám első számjegye a és a második számjegye b , tehát maga a szám $\overline{ab} = 10a + b$. Ekkor a számjegyek összege $a + b$, a számjegyek szorzata pedig $a \cdot b$. Ebből az alábbi egyenlőséget kapjuk: $10a + b = a + b + a \cdot b$. Levonva mindkét oldalból $a + b$ -t, azt kapjuk hogy $9a = a \cdot b$. Leoszthatunk a -val, mert a biztosan nem 0, így $b = 9$. Arra jutottunk, hogy $b = 9$, a viszont bármi lehet, mindenképpen teljesíteni fogja az egyenletet. Azaz a keresett kétjegyű számok: 19, 29, 39, 49, 59, 67, 89, 99, ami 9 darab szám.

Alternatíván, minden fix tízes helyiértékre legfeljebb egy megoldás lehet, hiszen az egyes helyi érték változtatásakor számjegyek összege annyival nő, amennyi a számjegyek szorzata.

E3. Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három kancsó 20 fokos teája van. Gandalf a három kancsó teát úgy szeretné felszolgálni, hogy mindhárom 80 fokra van melegítve. Gandalf egy időben két kancsó teát tud egyszerre melegíteni. Ha egy kancsó teát éppen melegít, akkor annak a hőmérséklete percenként 3 fokot emelkedik, ha pedig nem melegíti, akkor percenként 1 fokot csökken. Legalább hány percre van szüksége Gandalfnak ahhoz, hogy a három kancsó egyszerre legyen legalább 80 fokos?

Egy kancsó tea tetszőleges hőmérsékletre lehűlhet vagy felmelegedhet.

Megoldás: Nézzük meg, hogy egy perc alatt a három kancsó hőmérsékletének összege hogyan változik. Két kancsót melegít, a harmadikat pedig nem, ez alapján két kancsó tea hőmérséklete 3 fokkal nő egy kancsó teának pedig 1 fokkal csökken. Összeadva $3 + 3 - 1 = 5$, azaz 1 perc alatt 5-tel tudja Gandalf növelni az összeget. Kezdetben a három hőmérséklet összege $3 \cdot 20 = 60$, a folyamat végén pedig $3 \cdot 80 = 240$. E két szám különbsége 180, ez alapján legalább $\frac{180}{5} = 36$ percet kell melegítéssel töltenie. Lássuk be, hogy ez tényleg megvalósítható! Ha Gandalf ugyanannyi időt fordít bármelyik kancsópárra, akkor ez történik: 12 percig melegíti az első és második kancsót, 12 percig az első és harmadik kancsót, és 12 percig másodikat és harmadikat. Ekkor minden kancsó teára igaz, hogy 24 percig melegedett és 12 percig hűlt, tehát a mostani hőmérsékletük $20 + 24 \cdot 3 - 12 = 20 + 72 - 12 = 80$. Legalább 36 percre van szüksége Gandalfnak.



E
kategória

E4. Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz, hogy a párbajozást gyakorolják. Hányféleképpen teheti ezt meg?

Két párbaállítást akkor tekintünk különbözőnek, ha valakinek más a párja az egyikben, mint a másikban.

Megoldás: Az első párbajozó párt $\binom{10}{2} = 45$ -féleképpen választhatja ki Piton professzor. A megmaradó 8 diákból a második párbajozó párt $\binom{8}{2} = 28$ -féleképpen választhatja ki. Hasonlóképpen a harmadik párt $\binom{6}{2} = 15$ -féleképpen, a negyedik párt $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen. Ekkor már csak 2 diák maradt ki, ők egymással alkotnak párt. Viszont most minden lehetőséget többször számoltunk, mert a végső beosztásban a párok kiválasztásának sorrendje nem számít. Öt elemet $5! = 120$ -féleképpen lehet sorba állítani, ez alapján minden lehetőséget 120-szor számoltunk. Ezért a korábban kapott értéket osszuk le 120-szal. Tehát a megoldás $\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{5!} = \frac{45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{120} = 945$.

E5. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?

Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek.

Megoldás: Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok közt mind a négy témakör egyszer szerepel és az 1-es feladat algebra, így a maradék három feladathoz a maradék három témát $3! = 6$ -féleképpen tudjuk kiválasztani. Az első és a negyedik feladatok könnyűek, a második és ötödik feladatok közepesek, melyek közül mind 3-3 szerepel az előzetes feladatok közül. Mivel ezek a feladatok különböző témakörökből vannak, ezért egymástól függetlenül választható ki, hogy a három lehetőség közül melyik legyen az adott feladat. Így ezeket a feladatokat $3^4 = 81$ -féleképpen választhatjuk ki. Még hátra van a 3-as és a 6-os feladat. Ezek témája nem egyezhet az adott napi feladatsor korábbi feladatainak témájával, így mindkettőre két-két témalehetőség van (és ezek különbözőek is lesznek szükségszerűen a korábbi 4 feladat témája miatt). Mindkét feladat a nehéz feladatok közül való és mivel témájuk különbözik, ezért egymástól függetlenül két-két lehetőség van kiválasztani a konkrét feladatot az előzetes nehezek közül. Így a 3-as és 6-os feladatokra további $2^4 = 16$ lehetőség van. A felsorolt kiválasztások egymástól függetlenek, így az esetek szorzószorzódnak, azaz $6 \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 6 \cdot 81 \cdot 16 = 6^5 = 7776$ -féle feladatsort állíthat össze a zsűri.

E6. Boti, a bébi bástya egy minden irányban végtelen sakktáblán él. Boti minden éjszaka alva jár, ami során mindig átmászik egy oldalszomszédos mezőre, arra viszont nem emlékszik hogy melyikre. Minden délben megmondja neki a sakk királynője, hogy az aktuális mezőjének a négy oldalszomszédján hányszor járt eddig. Ezt a négy számot mindig véletlenszerű sorrendben mondja, tehát Boti nem tudja, hogy közülük melyik szám melyik mezőre vonatkozik. Boti boldog egy napon, ha biztosan tudja, hogy olyan mezőn van, ahol már korábbi napon is volt. Leghamarabb hányadik napon lehet boldog Boti?

Boti először az első és második nap közti éjszakán jár alva, napközben nem változtat helyet és emlékszik arra, hogy a korábbi napokon miket mondtak neki.

Megoldás: Boti, a bástya az első napon biztosan $(0, 0, 0, 0)$ -t hall, a másodikon pedig biztosan $(1, 0, 0, 0)$ -t. Aztán a harmadik napon akár visszamászott az eredeti mezőre, akár nem, mindenképp $(1, 0, 0, 0)$ -t hall. A negyedik napig az alábbi mászássorozatokot tehetette (a szimmetria miatt feltehetjük, hogy az első éjszaka jobbra mászott és azt is, hogy az első alkalommal, amikor nem jobbra vagy balra ment, akkor felfelé):

- Jobbra-jobbra-jobbra: Ennek a végén $(1, 0, 0, 0)$ -t hall és új mezőn jár;
- Jobbra-jobbra-fel: Ennek a végén $(1, 0, 0, 0)$ -t hall és új mezőn jár;
- Jobbra-jobbra-balra: Ennek a végén $(1, 1, 0, 0)$ -t hall és nem jár új mezőn;



E
kategória

- Jobbra-fel-balra: Ennek a végén $(1, 1, 0, 0)$ -t hall és új mezőn jár;
- Jobbra-fel-le: Ennek a végén $(1, 1, 0, 0)$ -t hall és nem jár új mezőn;
- Jobbra-fel-jobbra: Ennek a végén $(1, 0, 0, 0)$ -t hall és új mezőn jár;
- Jobbra-fel-fel: Ennek a végén $(1, 0, 0, 0)$ -t hall és új mezőn jár;
- Jobbra-balra-jobbra: Ennek a végén $(2, 0, 0, 0)$ -t hall és nem jár új mezőn;
- Jobbra-balra-fel: Ennek a végén $(2, 0, 0, 0)$ -t hall és új mezőn jár;
- Jobbra-balra-balra: Ennek a végén $(2, 0, 0, 0)$ -t hall és új mezőn jár.

Látható tehát, hogy minden számnégyes esetén van olyan lehetőség, ahol új mezőre lép a 4. napon, ezért ekkor még nincs olyan hallott sorozat, ami a boldogságot garantálná. Az ötödik napon azonban már van: ha a 4. napon és az 5. napon is $(1, 1, 0, 0)$ -t mondott neki a sakk királynője, akkor az 5. napon mindenképpen olyan mezőn van, ahol korábban járt, hiszen ez (a korábban említett szimmetriától eltekintve) a fenti esetszétválasztásból csak a harmadik, negyedik, és ötödik eset folytatásaként állhat elő, és ezek közül is csak a jobbra-fel-balra-le és a jobbra-fel-balra-jobbra lépéssorozatok esetén következhet be, és mindkét esetben olyan mezőn van, ahol már járt korábban. Tehát a válasz 5.

E7. Beni rajzol egy 7 élű valahány csúcsú összefüggő egyszerű gráfot. Az élekre ráírja az $1, 2, \dots, 7$ számokat úgy, hogy minden számot egy élre ír és minden élre egy szám kerül. Ezután Gergő rajzol egy másik gráfot, melynek csúcsai az $1, 2, \dots, 7$ számoknak felelnek meg, és akkor köt össze kettőt, ha a hozzájuk tartozó éleknek Beni grájában van közös csúcsa. Hányféle lehet ezek alapján Gergő grájja, ha tudjuk, hogy nincs benne kör?

Két gráf különböző, ha van két csúcsuk, melyek az egyikben össze vannak kötve, a másikban pedig nem. Egy gráf akkor egyszerű, ha nem tartalmaz se többszörös élt, se hurokét.

Megoldás: Gergő grájában nem lehet legalább 3 fokú csúcs. Tegyük fel, hogy létezik egy legalább 3 fokú csúcs, legyen ez az 1, a szomszédai pedig 2, 3 és 4 (és esetleg még mások is). Ekkor Beni grájában az 1-es élnek az egyik végpontja közös a 2-es él egyik végével, legyen ez u . Ugyanígy a 3-as éllel is van közös csúcsa az 1-es élnek, de ez nem lehet azonos az u csúccsal, mert akkor a 2-es és 3-as élnek is lenne közös csúcsa, tehát Gergő grájában lenne a 2 és a 3 közt is él, de akkor az 1, 2, 3 csúcsok kört alkotnának, ami nem lehet. Tehát 1 másik végpontja, jelöljük v -vel, közös a 3-as éllel. Viszont ugyanígy a 4-es élnek nem lehet közös csúcsa a 2 és 3 élekkel, de az 1-sel igen, tehát egy harmadik végpont kellene hozzá, ami nem lehet.

Így Gergő grájában minden foksám 0, 1 vagy 2. Olyan csúcs nem lehet, aminek 0 a foka, mert akkor ahhoz az élhez nem csatlakozna másik él Beni grájában, de az ő grájja összefüggő. Tehát Gergő grájja csak utakból és körökből állhat, de utóbbiak a feladat feltétele miatt nincsenek. Azonban nem állhat több útból sem, mert akkor két különböző út csúcsaihoz tartozó élek különböző komponenseket alkotnának Beni grájában, vagyis az nem lenne összefüggő. Pl. ha az 1, 2, 3 és a 4, 5, 6, 7 két út Gergő grájában, akkor Beni grájában az 1 és 2 éleknek, és 2 és 3 éleknek lesz egy-egy közös csúcsa, és egy három élű utat alkotnak. Ugyanígy a 4, 5, 6, 7 élek is egy négy élű utat ad, de ennek a csúcsai eltérnek az előzőtől, különben Gergő grájában a megfelelő csúcsok közt lenne él és a két út összeérne. Tehát a 7 csúcs Gergő grájában egyetlen utat alkot, ami $\frac{7!}{2} = 2520$ féle lehet, hiszen az utat középpontosan tükrözve ugyanazt a gráfot kapjuk.

Megjegyzés: Hasonlóan belátható, hogy Beni grájában minden csúcs foka legfeljebb 2, így az is egy út (vagy kör, de akkor Gergőében is lenne kör), és ha Beni grájja egy út, akkor Gergőé is az.

E8. Egy varázslónak kezdetben van egy 1 koncentrációjú oldata kék, és egy 0 koncentrációjú oldata piros üvegben. A varázsló két, különböző színű üvegben lévő oldat segítségével képes a semmiből egy új oldatot varázsolni egy üres kék vagy piros üvegbe, aminek koncentrációja a két oldat koncentrációjának átlaga. Legfeljebb mennyi lehet 15 varázslat után a varázsló kék üvegeiben lévő oldatok koncentrációinak összege? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Az oldatok nem tölthetők át más üvegbe. Amikor a varázsló új oldatot varázsol, a két felhasznált üveg színe és tartalma nem változik.



E
kategória

Megoldás: Nevezük összkoncentrációnak a maximalizálandó mennyiséget, vagyis a kék üvegekben lévő oldatok koncentrációinak összegét, nevezzünk optimálisnak egy konstrukciót amennyiben ott az összkoncentráció maximális. Először lássuk be, hogy van olyan optimális konstrukció, amiben először n piros üvegbe varázsol mindig az eredeti kék üveges oldat és az aktuálisan legújabb piros oldat segítségével (kezdetben az eredeti piros üveges oldat segítségével), majd $15 - n$ -szer az eredeti kék és a legújabb piros segítségével kékeket varázsol. Ennek bizonyításához vegyünk egy optimális konstrukciót, ha ezt módosítjuk úgy, hogy minden varázslásnál az eredeti kéket használjuk a konstrukcióban szereplő helyett akkor azzal nem ronthatunk a konstrukciónkon, hisz minden oldat koncentrációja legfeljebb 1. Ezt tovább módosítjuk úgy, hogy először a pirosakat készítjük el (ugyanabban a sorrendben, tehát mindig amikor kéket csinálnánk azt folyamatot félre tesszük és később végezzük el), ez megtehető, hisz varázslással kapott kéket már nem használunk másik oldat varázslásához és persze ugyanaz lesz az összkoncentráció, mivel csak a varázslatok sorrendjén változtattunk. Feltehető, hogy a piros oldatok közül az utoljára készített oldat koncentrációja nagyobb, mint a már meglévő piros oldatoké, hiszen ha nem így lenne, akkor lenne egy korábbi oldat, aminek legalább akkora a koncentrációja, és a most készített oldatunk helyett elkészíthettünk volna abból is egy oldatot, aminek a koncentrációja nagyobb lenne, ezzel pedig a konstrukció összkoncentrációja nem csökkenne. Ebből azonnal következik, hogy a piros oldatok koncentrációja az elkészítésük sorrendje szerint monoton nő. Ebből persze az is következik, hogy a legújabb oldatot mindig a legutóbb varázsolts piros oldat segítségével készítjük el.

Ezek után a maximális összkoncentráció megtalálásához elég az ilyen konstrukciókat vizsgálni, egy ilyen konstrukcióban pedig a összkoncentráció $= 1 + (15 - n) \cdot (1 - 2^{-n-1}) = 16 - \frac{15}{2^{n+1}} - n + \frac{n}{2^{n+1}}$, hisz van az eredeti 1 koncentrációjú kék oldat, és van $15 - n$ darab kék oldat amiknek a koncentrációja $(1 - 2^{-n-1})$. Ha n -ről $n + 1$ -re változtatjuk a piros oldatok számát, akkor az összkoncentráció változása: $\frac{15}{2^{n+1}} - \frac{15}{2^{n+2}} - 1 + \frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n}{2^{n+1}}$, vizsgáljuk ennek előjelét, ehhez persze elég a 2^{n+2} -szeresét vizsgálni: $30 - 15 - 2^{n+2} + n - 2n = 15 - (2^{n+2} + n)$, ami $n < 2$ -re pozitív és egyébként negatív. Tehát a kék összkoncentráció $n = 2$ -ig szigorúan nő, utána pedig szigorúan csökken, tehát a keresett $n = 2$ -re lesz maximális: $1 + 13 \cdot \frac{7}{8} = \frac{99}{8}$, azaz a megoldás 107.

E9. Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e érintője. Legyen f egy olyan egyenes, ami merőleges e -re és k -t két különböző pontban metszi. Legyenek f -nek az e -vel, illetve k -val való metszéspontjai rendre E , A és B , ebben a sorrendben elhelyezkedve f -en. Legyen az e és BO egyenesek metszéspontja I . Legyen g az I -ből k -hoz húzott e -től különböző érintő, az érintési pontja legyen J . Tudjuk, hogy g merőleges e -re. Legyen továbbá a BI és az AJ egyenesek metszéspontja H , valamint legyen az AH szakasz hossza x . Mennyi $(x^2 - 4)^2$?

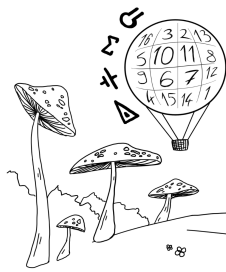
Megoldás: Legyen K az e érintési pontja k -val. Mivel az I -ből húzott két érintő merőleges egymásra, ezért $KIJO$ egy négyzet, hiszen K és J csúcsánál is derékszög van, hiszen azok érintési pontok. Legyen L az OJ és EB egyenesek metszéspontja. Mivel OI a $KIJO$ négyzet egy átlója, ezért $IOJ \angle = BOL \angle = 45^\circ$. Viszont, mivel O a kör középpontja, és AB egy húr, ezért LO felezi a $BOA \angle$ -t, valamint L felezi BA -t. Ebből $BOA = 90^\circ$, amiből kapjuk, hogy $|BA| = \sqrt{2}$. Viszont mivel L felezi BA -t ezért $|AL| = |BL| = |OL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ebből kapjuk, hogy $|JL| = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ekkor Pithagorasz tételből $|AJ| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)}$

Vegyük észre, hogy IJ és BA párhuzamosak, amiből következik, hogy $H I J$ és $H B A$ háromszögek hasonlóak egymással, és a hasonlóságot felírva kapjuk, hogy $\frac{|AH|}{|HJ|} = \frac{|BA|}{|IJ|} = \frac{\sqrt{2}}{1}$. Ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{|HA|}{|AJ|} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \text{ vagyis } |AH| = \sqrt{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}}} \text{ A gyökön belüli tört számlálóját és nevezőjét is megszorozva } \sqrt{2} - 1 \text{-el, } \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}}} = \sqrt{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$(x^2 - 4)^2 = 8$$



XIX. Dürer Verseny

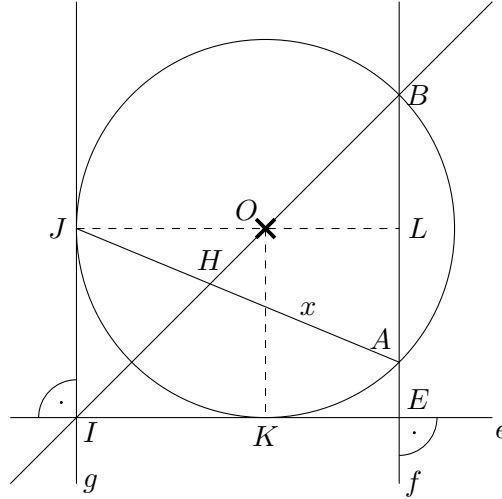


E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.)

Váltó megoldókulcs



E10. Legyen $a_1 = 3$, és minden $n \geq 1$ esetén legyen $a_{n+1} = 3^{a_n}$. Az $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ számok közül hány végződik 7-es számjegyre?

Megoldás: Először vizsgáljuk meg, hogy a 3 hatványainak mi lehet az utolsó jegye:

- Ha $k = 4m + 1$, akkor 3^k utolsó jegye 3.
- Ha $k = 4m + 2$, akkor 3^k utolsó jegye 9.
- Ha $k = 4m + 3$, akkor 3^k utolsó jegye 7.
- Ha $k = 4m$, akkor 3^k utolsó jegye 1.

Az utolsó jegy tehát a 4-es maradéktól függ, ezt is vizsgáljuk meg:

- Ha k páratlan (azaz 4-es maradéka 1, vagy 3), akkor 3^k 4-es maradéka 3.
- Ha k páros (azaz 4-es maradéka 0, vagy 2), akkor 3^k 4-es maradéka 1.

A sorozat első tagja $a_1 = 3$, ennek az utolsó jegye 3, négyes maradéka szintén 3. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $n \geq 2$ esetén a_n 7-es számjegyre végződik, és 4-es maradéka 3.

Kezdőesetnek $a_2 = 3^3 = 27$ helyes, nézzük az indukciós lépést: Tegyük fel, hogy valamilyen n -re a_n utolsó jegye 7, a 4-es maradéka pedig 3, ekkor $a_{n+1} = 3^{a_n}$ szintén 7-re fog végződni és $4m+3$ alakú lesz, mivel a_n $4m+3$ alakú volt (azaz páratlan is).

Tehát $k \geq 2$ esetén a_k 7-re fog végződni, $k = 1$ esetén pedig 3-ra, tehát a sorozatnak **2025** olyan tagja van, aminek az utolsó jegye 7.

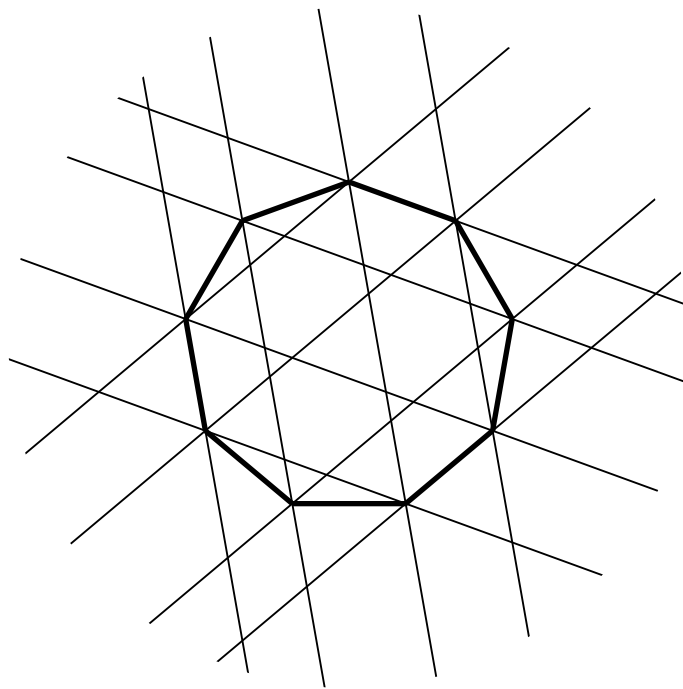
E11. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek?

Megoldás: Mivel 9 páratlan, ezért a kilencszög minden átlója párhuzamos valamelyik oldallal. Így kategorizálhatjuk a szabályos háromszögeket aszerint, hogy melyik oldalakkal párhuzamosak az oldalai. Világos, hogy ha a három átló szabályos háromszöget zár be, akkor a szabályos 9-szög velük párhuzamos oldalai is, ez pedig a forgásszimmetria miatt pontosan akkor teljesül, ha minden harmadik oldalt választjuk ki, amit 3-féleképpen lehet megtenni, így 3 kategória lesz, és a szimmetria miatt mindegyikben ugyanannyi eset.



E
kategória

Ekkor mindhárom irány esetén az azzal párhuzamos átlót 4-féleképpen lehet kiválasztani, ami $4^3 = 64$ lehetőség. Ebből azonban még le kell vonni azokat az eseteket, amikor a három egyenes nem határoz meg szabályos háromszöget, vagyis egy ponton mennek át. A megoldás végén szereplő ábráról leolvasható, hogy a szabályos kilencszög átló/oldal egyenesei közül azok, amelyek a megfelelő párhuzamossági osztályokban vannak, három csak akkor mehet át egy ponton, ha ez a pont csúcsa a kilencszögnek. Így csak azokat az eseteket kell nézni, amikor a három egyenes egy csúcsban találkozik. Ekkor a csúcs, amiben találkoznak (ami már egyértelműen meghatározza a három átlót) biztosan végpontja valamelyik oldalnak, amivel párhuzamos a háromszög valamelyik oldalegyenes, ellenkező esetben az egyik oldallal szemben lenne, de akkor nem mehetne át rajta ezen oldallal párhuzamos egyenes. Ezen 6 csúcsban viszont mind találkozhat 3 átló, amik párhuzamosak a megadott irányokkal, ezért 6 elfajuló eset van, vagyis $64 - 6 = 58$ esetben határoznak meg szabályos háromszöget. Így az összes lehetőség száma: $3 \cdot 58 = 174$.



E12. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalánál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, hatványszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?

Juliska könyvének az oldalai 1-től n -ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszakapjuk ugyanazt a számot, hatványszámoknak pedig azon pozitív egészeket, melyek előállnak a^b alakban, ahol a és b pozitív egészek és $b \geq 2$.



E
kategória

Megoldás: A legkisebb lehetséges számpár a 9-10, de ezek nem tartalmaznak 5-ös számjegyet, így nem lehet itt nyitva a könyv. A kétjegyű palindromszámok a 11-gyel osztható számok 99-ig, de ezek közül csak a 44, 55 és 66 melletti számokban szerepel 5-ös számjegy, de ezek egyike sem hatványszám. Így legalább háromjegyű mindkét oldalszám. Nézzük meg a 100 és 399 közti palindrom számokat. Ezek $\overline{1a1}$, $\overline{2b2}$ és $\overline{3c3}$ alakúak, így a mellettük álló számok $\overline{1a0}$, $\overline{1a2}$, $\overline{2b1}$, $\overline{2b3}$ és $\overline{3c2}$, $\overline{3c4}$ alakúak. Ezek közt csak akkor szerepel 5-ös számjegy, ha $a, b, c = 5$. Ekkor viszont a középső számjegy páratlan mindkét oldalon, így ezek a lehetőségek is kiestek. Azaz az oldalszámok közt van legalább 400 nagyságú. 500 és 598 közti szám nem állhat egyik oldalon sem, mert 499-től 599-ig minden szám tartalmaz páratlan számjegyet. Nézzük meg 400 és 499 között a hatványszámokat, valamint 599-től kezdve szintén. Az ilyen négyzetszámok a $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $25^2 = 625$, de a 400, 441 mellett nincsenek 5-ös jegyet tartalmazó számok, így köztük a 484 és a 625 maradt lehetőségnek. A 484-485 és a 625-626 számok valóban teljesítik a feltételeket, így Juliska könyve legfeljebb 625 oldalas lehet, hogy egyértelmű legyen Jancsi számára az oldalszám. Azaz elég a hatványszámokat 400-499 és 599-625-ig figyelni. Köbszámok nem esnek ide ($7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$), ötödik hatványok szintén nem ($3^5 = 243$, $4^5 = 1024$), hetedik és kilencedik hatványok sem ($2^7 = 128$, $3^7 = 2187$, $2^9 = 512$), míg a párosadik hatványokat már a négyzetszámok során végigvettük. Legfeljebb 625 oldalas Juliska könyve, ekkor kitalálható a két oldalszám.

E13. Egy 12 fős bűnbanda egy kerek asztal körül tart megbeszélést. Mindenki maga elé néz, vagy kölcsönösen beszélget valamelyik szomszédjával. Hányféleképpen nézhet ki a megbeszélés?

Két megbeszélést akkor tekintünk különbözőnek, ha van két olyan ember, akik az egyik esetben beszélgetnek egymással, a másikkban nem.

Megoldás: Először nézzünk meg egy másik feladatot: Egy hosszú sorban ül n bűnöző, akiket megszámoztunk 1-től n -ig. Mindenki maga elé néz, vagy párban beszélget egy szomszédjával. Hányféleképpen lehet ezt megvalósítani?

Ezen a feladaton belül legyen A_n az olyan megoldások száma, ahol az n . bűnöző maga elé néz. Továbbá legyen B_n az olyan megoldások száma, ahol az n . bűnöző a szomszédjával beszélget.

Indukcióval szeretnénk megtalálni A_n és B_n értékét. Kis értékekre könnyen látható, hogy $A_2 = 1$, $B_2 = 1$, $A_3 = 2$ és $B_3 = 1$.

Ha n ember ül a sorban, és az n . bűnöző maga elé néz, akkor a korábbi $n - 1$ ember bármilyen beosztásban beszélgethet, ezért $A_n = A_{n-1} + B_{n-1}$.

Ha n ember ül a sorban, és az n . bűnöző az $n - 1$. bűnözővel beszélget, akkor az első $n - 2$ embert kell beosztani valamilyen módon, tehát $B_n = A_{n-2} + B_{n-2}$.

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $A_n + B_n = A_{n-1} + B_{n-1} + A_{n-2} + B_{n-2}$.

$A_2 + B_2 = 2 = F_3$, $A_3 + B_3 = 3 = F_4$, és a továbbiakban $A_n + B_n$ előállítására éppen a Fibonacci-sorozat rekurziós összefüggését használtuk, ez alapján a továbbiakban is a Fibonacci-sorozat értékeit kapjuk, azaz $A_n + B_n = F_{n+1}$.

Most térjünk át a kitűzött körasztalos feladatra! Egy körasztalnál ha az 1. és az 12. bűnöző nem egymással beszélgetnek, akkor ugyanannyi lehetőséget kapunk, mintha egy sorban ülnének, azaz $A_{12} + B_{12} = F_{13}$ lehetőséget.

Ha a körasztalnál az 1. és az 12. bűnöző egymással beszélgetnek, akkor a maradék 10 embert kell beosztani valamilyen módon, itt a lehetőségek száma $A_{10} + B_{10} = F_{11}$.

Tehát a körasztalnál az összes lehetőség száma $A_{12} + B_{12} + A_{10} + B_{10} = F_{13} + F_{11} = 233 + 89 = 322$.

E14. Töltsétek ki a táblázat mezőit az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata?



E
kategória

	9	11	8	9	10	
10		6			5	1
7						
		3			1	6

Megoldás:

A harmadik sor mellett a 7 áll, azaz ott bármely két egymás melletti szám összege legfeljebb 7. Tehát a 6 mellett csak az 1 állhat, tehát a 6 a sor egyik szélén áll. Mivel a jobb oldali (balról hatodik) oszlopban már van 6-os, így a harmadik sorban a 6 csak a bal szélre kerülhet, és az 1-es közvetlen mellé.

A második sorban a 4 csak az első vagy a harmadik helyre kerülhet (a 6 mellé), hogy legyen két szomszédos, melyek összege 10. Ha az első helyen lenne, akkor az első oszlopban egymás mellett lenne a 4 és a 6, ami nem felel meg annak a feltételnek, hogy nincs két szomszédos, aminek az összege nagyobb 9-nél. Tehát a 4 a második sor harmadik helyére kerül. Tudjuk, hogy a második oszlopban van két szomszédos szám, melyek összege 11, ez csak úgy lehet, ha a 6 és az 5 egymás melletti mezőben van. Mivel a 6 alatti mező már foglalt, így az 5 a második oszlop legfelső mezőjében van.

	9	11	8	9	10	
		5				
10		6	4		5	1
7	6	1				
		3			1	6

	9	11	8	9		10
		5				
10		6	4		5	1
7	6	1	3	4	2	5
					6	
		3			1	6

Mivel a harmadik sorban a szomszédosak összege legfeljebb 7, így az 5 mellé csak az 1 és a 2 kerülhet. Ha az 5 a balról harmadik oszlopba kerülne, akkor egymás mellé kerülnének a 4-gyel, ezért lenne két szomszédos szám a harmadik oszlopban, melyek összege nagyobb, mint 8. Így a harmadik sorban nem kerülhet az 5 az 1 mellé. Tehát az 5-nek csak egy szomszédja lehet, azaz a jobb szélső mezőbe kerül, mellé pedig a 2. Ekkor a harmadik sorból már csak a 3 és a 4 hiányzik. Mivel a balról harmadik oszlopban már van 4, így itt csak a 3 állhat. A maradék helyre kerül a 4. Így kitöltöttük a harmadik sort.

Mivel minden oszlopban pontosan egy 6-os van, így a (fentről) negyedik sorban a 6-os a harmadik, a negyedik, vagy az ötödik helyen áll. Ha a harmadik helyen állna, akkor a harmadik oszlopban egymás alá kerülne egy 3 és egy 6, melyek összege nagyobb 8-nál, azaz ide nem kerülhet a 6-os. Ha a negyedik helyen állna, akkor a negyedik oszlopban egymás alá kerülne egy 4-es és egy 6-os, ami ellentmond azzal hogy ebben az oszlopban a szomszédos mezőben a számok összege legfeljebb 9. Tehát a 6 az ötödik helyen áll.



E
kategória

Ekkor a harmadik oszlopban a 6 csak a fentről első vagy a hatodik helyen állhat, hiszen minden más sorban már van hatos. Mivel ebben az oszlopban a szomszédos mezőkben a számok összege legfeljebb 8, így a hatos nem kerülhet az első helyre a 4-gyel szomszédos mezőre. Tehát a 6 a legalsó (hatodik) helyre kerül. Az 5 nem kerülhet a harmadik oszlop felső három helyére, mert azokban a sorokban már van 5. Nem kerülhet a fentről ötödik helyre sem, a 6 fölé, mert ekkor lenne két szomszédos szám az oszlopban melyek összege nagyobb 8-nál. Tehát az 5 a negyedik mezőben van. Ekkor ki tudjuk tölteni a harmadik oszlopot: itt két üres mező van, amikre az 1 és 2 számokat írjuk. Mivel a fentről negyedik sorban már van 1, így oda kerül a 2 és az legfelső mezőbe az 1.

Ahhoz, hogy minden számjegy minden sorban és oszlopban csak egyszer szerepeljen, az utolsó 6-os az első sor negyedik helyén van.

	9	11	8	9	10
		5	1	6	
10	2	6	4	3	5
7	6	1	3	4	2
			5		6
	4	3	2	5	1
			6		

Ekkor már csak két szám hiányzik az ötödik sorból, a 4 és az 5. Mivel a negyedik oszlopban már van 4-es, így az ötödik sor negyedik helyére kerül az 5 és az első helyére a 4.

A negyedik oszlopban van két szomszédos szám, melyek összege 9. Mivel a 4, 5 és 6 közül semelyik kettő nem szomszédos, ezért ez csak akkor fordulhat elő, ha a 3 a 6 mellé kerül: a második sor negyedik helyére. Ekkor a második sorból már csak a 2 hiányzik, az első helyről.

Az első oszlopban három üres mező van. Az 5 csak a legalsó helyre kerülhet, a többi sorban már van 5-ös. A maradék két helyből az 1 csak a fentről negyedik helyen lehet, mert az első sorban már van 1. Így a bal felső sarokba a 3 kerül.

Ekkor már ki tudjuk tölteni a negyedik oszlopot: onnan az 1 és a 2 hiányzik. Az 1 csak a legalsó mezőben lehet, mert a másik üres mező sorában (a negyedik sorban) már van 1.

	9	11	8	9	10
	3	5	1	6	4
10	2	6	4	3	5
7	6	1	3	4	2
	1	4	5	2	6
	4	3	2	5	1
	5	2	6	1	3

A második oszlopban két üres mező van, ahonnan a 2 és 4 számok hiányoznak. A 2 csak a legalsó mezőbe kerülhet, mert a negyedik sorban már van 2. Így a második oszlopba a 4 a negyedik sorba kerül.

A negyedik sor utolsó mezőjébe a 3 kerül, hisz már csak ez hiányzik a sorból. Az utolsó oszlopban van két szomszédos szám melyek összege 10, azaz a hiányzó 4-es a 6 szomszédjába a bal alsó sarokba kerül. Ekkor egy szám hiányzik az utolsó oszlopból: egy 2 a legfelső mezőből. Ekkor már csak a legfelső és legalsó sorból hiányzik egy-egy szám, amik egyértelműen kitölthetők az ábra szerint.

A táblázat sarkaiba a 2, 3, 4 és 5 számok kerülnek. Ezek szorzata 120.

	9	11	8	9	10
		5	1	6	
10		6	4		5
7	6	1	3	4	2
			5		6
	3	2		1	6
		6			

	9	11	8	9	10
	3	5	1	6	
10	2	6	4	3	5
7	6	1	3	4	2
	1		5	2	6
	4	3	2	5	1
	5		6	1	

E15. Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű a legkisebb olyan pozitív egész n , amelyre $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$?

Megoldás: Ismert, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege is. Tehát ahhoz, hogy $\frac{2}{9}t(n)$ egész legyen, n -nek kilencel oszthatónak kell lennie, azaz $2n$ is osztható 9-cel, tehát $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$ is. Ha $\frac{2}{9}t(n)$ osztható kilencel, akkor ennek a fele, azaz $\frac{1}{9}t(n)$ is (hiszen ugyanannyi 3-as prímtényezőt tartalmaz), azaz $t(n)$ osztható $9 \cdot 9 = 81$ -gyel, azaz $t(n)$ legalább 81.



XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Vizsgáljuk meg, hogy hogy viszonyul egymáshoz $2t(n)$ és $t(2n)$ helyiértékenként. Amennyiben n kettővel való szorzása során egy adott helyiértéken nem történik tízesátlépés, abban az esetben x -ből $2x$ lesz, így itt ugyanannyi adódik hozzá $2t(n)$ -hez és $t(2n)$ -hez. Ha valamelyik helyiértéken tízesátlépés van, akkor x -ből $2x - 10$ lesz, és hozzáadunk 1-et a következő helyiértékhez, azaz minden tízesátlépés $(10+x) - (1+x) = 9$ -cel csökkenti $t(2n)$ értékét $2t(n)$ -hez képest. Képlettel felírva $t(2n) = 2t(n) - 9 \cdot \#_t$, ahol $\#_t$ jelöli a tízesátlépések számát n kettővel való szorzása során.

Egy helyiértéken pontosan akkor fog tízesátlépés történni, ha ott legalább 5 szerepel, függetlenül a kisebb helyiértékektől. Tegyük fel, hogy $t(n) = 81$, ekkor ahhoz, hogy a feladat feltételei teljesüljenek $t(2n)$ -nek $\frac{2}{9} \cdot 81 = 18$ -nak kell lennie, azaz $\frac{2 \cdot 81 - 18}{9} = 16$ tízesétlépésnek kell történnie a 2-vel való szorzás során, azaz n legalább 16 jegyű. A 16 jegyű számok között már található megfelelő n , például $n = 5555555555555556$ esetén $2n = 11111111111111112$, amire $t(n) = 81$ és $t(2n) = 18$.

Ha $t(n) \neq 81$, akkor mivel $t(n)$ osztható 81-gyel, legalább 162 értéke, tehát n legalább $\frac{162}{9} = 18$ jegyű, ami már több, mint 16, azaz a feladat kérdésére 16 a válasz.

E16. Mógus professzor megkérte Harryt, hogy gondoljon 4 különböző pozitív egész számra, majd írja fel egy lapra az összes nem üres részhalmazukban a számok összegét és ne mutassa meg. Ezután Harry összeszorozta a papíron szereplő 15 számot, azonban mielőtt Harry elmondta volna az eredményt, Mógus professzor mondott egy olyan pozitív egész számot, amelyről biztosan tudja, hogy osztja ezt a szorzatot. Mi a legnagyobb szám, amit Mógus professzor mondhatott?
Válaszként a megoldás 10000-es maradékát adjátok meg!

Megoldás: Először vegyük észre, hogy Mógus professzor nem mondhat olyan számot, ami egy 3-nál nagyobb p prímmel osztható, mert ha mindegyik szám 1 maradékot ad p -vel osztva, akkor semelyik összeg nem lesz p -vel osztható, tehát a szorzat sem. Így elég a 2 és a 3 legnagyobb kitevőjű hatványát meghatározni, amik biztosan osztják a szorzatot.

Ha a Harry által gondolt négy szám az 1, 9, 17, 25, akkor a kapott szorzatban 2 kitevője 8, mert a 6 darab kételemű halmaz mindegyikében $4k + 2$ alakú, a négyeleműben $8k + 4$ alakú, 4, a többiben páratlan az összeg, így 2^8 -nál nem lehet nagyobb a legnagyobb 2-hatvány. Ez viszont biztosan osztja: Ha a számok mind párosak, akkor mind a 15 részhalmazösszeg páros, tehát a szorzat osztható 2^{15} -nel. Ha pedig van köztük páratlan, akkor az üres részhalmazt is belevéve pontosan a részhalmazok felében lesz páros az összeg: Egy páratlan számot kiválasztva a többi három tetszőleges részhalmaza esetén egyértelműen eldönthető, hogy őt beletegyük vagy ne a halmazba, hogy páros legyen az összeg. Így ez $\frac{16}{2} = 8$ halmaz, amiből az egyik az üres halmaz, tehát pontosan 7 páros összegű részhalmaz van, azaz a 2^7 osztja a szorzatot. Az egyik összeg viszont 4-gyel is osztható: tekintsük az $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ összegeket, ha ezek közül nincs 0 maradékot adó, akkor van két azonos maradékú, ezek különbsége viszont egy 0 maradékú összeget ad. Tehát 2^8 is osztja a szorzatot, vagyis ez a legnagyobb 2-hatvány, ami biztosan osztja a szorzatot.

Ezután ha a Harry által gondolt négy szám az 1, 10, 19, 30, akkor 2 részhalmazban $9k + 3$, 1 részhalmazban $9k + 6$ alakú az összeg, a többiben nem osztható 3-mal, tehát a 3^3 -nál nem lehet nagyobb a legnagyobb 3-hatvány. Most belátjuk, hogy ez biztosan osztja. Ha van egy 3-mal osztható szám, akkor a fentihez hasonlóan a többi 3 számnak is van egy olyan nemüres részhalmaza, amiben az elemek összege osztható 3-mal, és akkor találtunk 3 megfelelő részhalmazt: ez a szám, a másik részhalmaz, illetve a kettő uniója. Ha nincs 3-mal osztható szám, akkor hármas maradékok szerint 5 eset van: (1, 1, 1, 1); (1, 1, 1, 2); (1, 1, 2, 2); (1, 2, 2, 2) és (2, 2, 2, 2). Minden esetben pontosan négy részhalmazban osztható 3-mal az összeg, vagyis ekkor is osztható 3^3 -al.

Így a $2^8 \cdot 3^3 = 6912$ biztosan osztja a szorzatot, és ennél nagyobb hatvánnyal egyik prím sem szerepelhet Mógus professzor számában, ezért ez a legnagyobb szám, amit mondhatott.