

E+
kategória

E⁺-1. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?

A kétjegyű pozitív egész számok a 9-nél nagyobb és 100-nál kisebb egészek. (3 pont)

E⁺-2. Boti, a bébi bátya egy minden irányban végtelen sakktáblán él. Boti minden éjszaka alva jár, ami során mindig átmászik egy oldalszomszédos mezőre, arra viszont nem emlékszik hogy melyikre. Minden délben megmondja neki a sakk királynője, hogy az aktuális mezőjének a négy oldalszomszédján hányszor járt eddig. Ezt a négy számot mindig véletlenszerű sorrendben mondja, tehát Boti nem tudja, hogy közülük melyik szám melyik mezőre vonatkozik. Boti boldog egy napon, ha biztosan tudja, hogy olyan mezőn van, ahol már korábbi napon is volt. Leghamarabb hányadik napon lehet boldog Boti?

Boti először az első és második nap közti éjszakán jár alva, napközben nem változtat helyet és emlékszik arra, hogy a korábbi napokon miket mondtak neki. (3 pont)

E⁺-3. Egész számok egy 10 elemű H halmazának összes nem üres részhalmazára képezzük a részhalmaz elemeinek összegét, az így kapott 1023 szám szorzatát jelölje P . Mennyi az olyan prímszámok összege, amelyek bármely, a leírt tulajdonságokkal rendelkező H halmazra osztják a H -hoz tartozó P szorzatot?

A halmaz minden eleme különböző. (3 pont)

E⁺-4. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

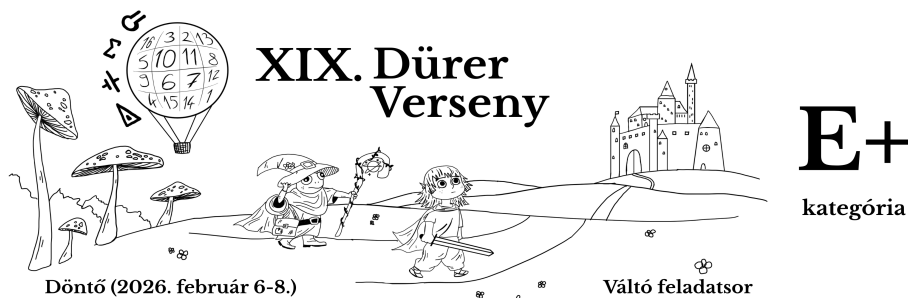
Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?

Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek. (3 pont)

E⁺-5. Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e érintője. Legyen f egy olyan egyenes, ami merőleges e -re és k -t két különböző pontban metszi. Legyenek f -nek az e -vel, illetve k -val való metszéspontjai rendre E , A és B , ebben a sorrendben elhelyezkedve f -en. Legyen az e és BO egyenesek metszéspontja I . Legyen g az I -ből k -hoz húzott e -től különböző érintő, az érintési pontja legyen J . Tudjuk, hogy g merőleges e -re. Legyen továbbá a BI és az AJ egyenesek metszéspontja H , valamint legyen az AH szakasz hossza x . Mennyi $(x^2 - 4)^2$? (4 pont)

E⁺-6. Moriarty professzor végtelen sokszor feldob egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb dob 6-ost, mint három alkalommal páratlan számot? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

A három páratlan számot nem kell közvetlenül egymás után dobni. (4 pont)



E+
kategória

E⁺-7. Egy varázslónak kezdetben van egy 1 koncentrációjú oldata kék, és egy 0 koncentrációjú oldata piros üvegben. A varázsló két, különböző színű üvegben lévő oldat segítségével képes a semmiből egy új oldatot varázsolni egy üres kék vagy piros üvegébe, aminek koncentrációja a két oldat koncentrációjának átlaga. Legfeljebb mennyi lehet 15 varázslat után a varázsló kék üvegeiben lévő oldatok koncentrációinak összege? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Az oldatok nem tölthetők át más üvegbe. Amikor a varázsló új oldatot varázsol, a két felhasznált üveg színe és tartalma nem változik. (4 pont)

E⁺-8. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek? (4 pont)

E⁺-9. Egy 12 fős bűnbanda egy kerek asztal körül tart megbeszélést. Mindenki maga elé néz, vagy kölcsönösen beszélget valamelyik szomszédjával. Hányféleképpen nézhet ki a megbeszélés?

Két megbeszélést akkor tekintünk különbözőnek, ha van két olyan ember, akik az egyik esetben beszélgetnek egymással, a másikon nem. (5 pont)

E⁺-10. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalnál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, hatványszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?

Juliska könyvének az oldalai 1-től n -ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszkapjuk ugyanazt a számot, hatványszámoknak pedig azon pozitív egészeket, melyek előállnak a^b alakban, ahol a és b pozitív egészek és $b \geq 2$. (5 pont)

E⁺-11. Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű a legkisebb olyan pozitív egész n , amelyre $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$? (5 pont)

E⁺-12. Jelölje $T_k(q(x))$ a $q(x)$ polinom legfeljebb k -adfokú tagjaiból képzett polinomot. Legyen $p(x)$ egy 2026-odfokú egész együtthatós polinom, amelyre $T_i(p(x))$ osztja $p(x)$ -et minden $0 \leq i \leq 2026$ egészre. Legfeljebb hány különböző együtthatója lehet $p(x)$ -nek?

Például $T_3\left(x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x - \frac{1}{2}\right) = 0x^3 + 2x^2 + 0x - \frac{1}{2}$. A $T_i(p(x))$ polinom akkor osztja a $p(x)$ polinomot, ha létezik olyan $t(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $T_i(p(x)) \cdot t(x) = p(x)$. (5 pont)



E+
kategória

E⁺-13. Benedek két törtszámról tudja, hogy a szorzatuk egy egész szám és hogy őket egyszerűsített vegyes tört alakban felírva a felírt hat darab egész szám az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok. Hányféle lehet ennek a két törtnek a halmaza?

A $\frac{p}{q}$ törtszám egyszerűsített vegyes tört alakja $x\frac{y}{z}$, ahol x a szám egészrészével egyenlő és $\frac{y}{z}$ a szám törtrészének egyszerűsített tört alakja. (6 pont)

E⁺-14. Töltsétek ki a táblázat mezőit az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata? (6 pont)

	9	11	8	9	10
10		6			5
7					1
	3			1	6

E⁺-15. Az ábrán látható kilenc négyzetbe szeretnénk valamilyen sorrendben beírni az 1, 2, ..., 9 számokat úgy, hogy a feltüntetett egyenlőtlenségek mind igazak legyenek. Minden négyzetbe egy számot írhatunk be és minden számot pontosan egyszer használhatunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

$$\square < \square > \square < \square > \square < \square > \square < \square > \square$$

(6 pont)

E⁺-16. Hány olyan trapéz van, amelynek oldalai egész hosszúságúak és a területe 85 egység?

Két trapézt akkor tekintünk különbözőnek, ha nem egybevágóak. (6 pont)