Dürer Verseny

2026. február 6-8.

F F+

XIX. Dürer Verseny

F

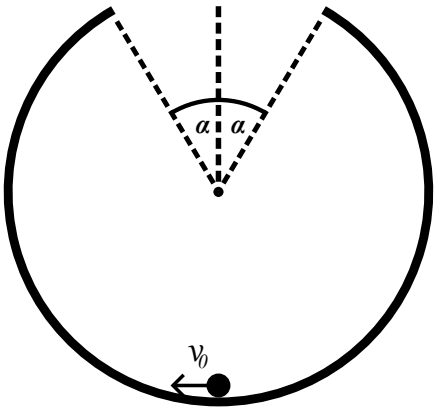
kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Elméleti feladatsor**

Figyelem! *A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldások számszerű közlése, levezetés és a logikai lépések szöveges indoklása is szükséges (pl. „Newton III. törvénye alapján...”)!*

1. feladat (11 pont)

Egy, a talajhoz rögzített R sugarú, függőleges síkú kör tetejéből 2α középponti szöghöz tartozó, a függőleges tengelyre szimmetrikus ív hiányzik, ahogyan az *ábra* is mutatja. A körív legalsó pontjáról egy kis testet indítunk el v_0 nagyságú vízszintes kezdősebességgel. A kis test a kör falán súrlódásmentesen csúszik. Miután eléri a körív legfelső pontját, arról leválik, majd az ív túlsó végét érintve „visszacsatlakozik”, és a körív belsejében folytatja útját. Legyen $\alpha > 0$ és $v_0 = \sqrt{kgR}$, ahol k egy pozitív valós szám.

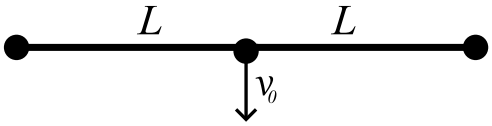


(a) Mekkora α esetén valósulhat meg a mozgás, ha $k = 5$?

(b) Legalább mekkora k esetén jöhet létre a mozgás? Mekkora az ehhez tartozó α szög?

2. feladat (14 pont)

Három m tömegű, pontszerű, Q töltésű test egy súrlódásmentes, vízszintes asztalon helyezkedik el. A testek kezdetben egy vonalban, nyugalomban vannak. A középső testet a szélső kettővel egy-egy L hosszúságú, elhanyagolható tömegű, töltetlen, szigetelő anyagból készült feszes kötél köti össze, ahogyan az *ábra* is mutatja. Egy óvatlan pillanatban a középső testet v_0 sebességgel meglökjük a kötelekre merőleges irányban. Mekkora lesz a mozgás során a két szélső test közötti legkisebb távolság?



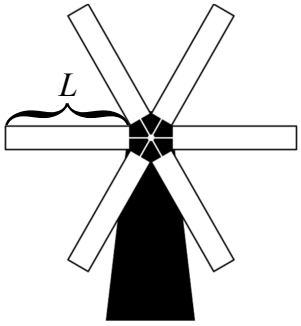
Útmutatás: Feltehetjük, hogy a mozgás során a kötelek végig feszesek.

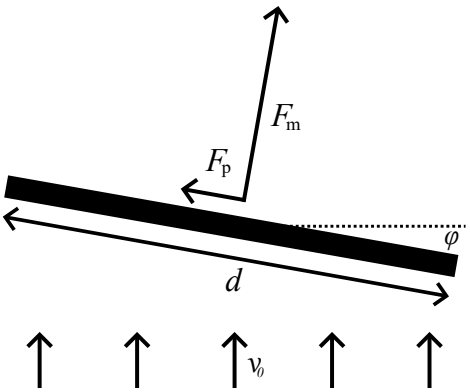
3. feladat (15 pont)

Egy mesevilág mezején szélmalmot építenek. A mezőn a levegő sűrűsége ϱ, és v_0 sebességű szél fúj mindig ugyanabból az irányból. A szélmalmot ezzel az iránnyal szembe építik. Az L magasságú, d szélességű lapátok a forgás síkjához képest kis φ szöggel be vannak döntve. Egy ferdén álló lapátra ható légellenállási erő kezelhető két külön erőként. Az egyik a lapra merőleges, a másik pedig azzal párhuzamos. A *bal oldali ábrán* a szélmalom látható szemből, míg a *jobb oldali ábra* a legfelső lapátra ható légellenállási erő felbontását mutatja felülnézetből abban az állapotban, amikor ez a lapát függőlegesen felfelé áll. Kis φ esetén a két irányhoz tartozó áramlási tényezők a következő formulákkal jól közelíthetők: a lappal párhuzamos légellenállás áramlási tényezője $C_\mathrm{p}(\varphi) \approx 2\pi\varphi$, míg a lapra merőleges légellenállás áramlási tényezője $C_\mathrm{m}(\varphi) \approx a - b\varphi^2$, ahol a és b állandók.

(a) A szélkerék álló helyzetből indulásakor mekkora és milyen irányú forgatónyomaték hat a kerékre? Tegyük fel, hogy a kerék páros sok (N darab) lapátból áll, és ezek egyenletesen helyezkednek el.

(b) Egy humoros mérnök azon gondolkodik, mi lenne, ha csak egy lapátot raknának a szélmalomra. Mi ezzel a probléma? Mekkora és milyen irányú lesz ebben az esetben induláskor a lapát által generált forgatónyomaték?





Útmutatás: A légellenállási erőt az $F_\mathrm{d} = A\varrho C v^2/2$ összefüggéssel számoljuk, ahol ϱ a közeg sűrűsége, A az áramlásra merőleges keresztmetszet, C a vizsgált test áramlási tényezője, v pedig a közeg sebessége.

4. feladat (13 pont)

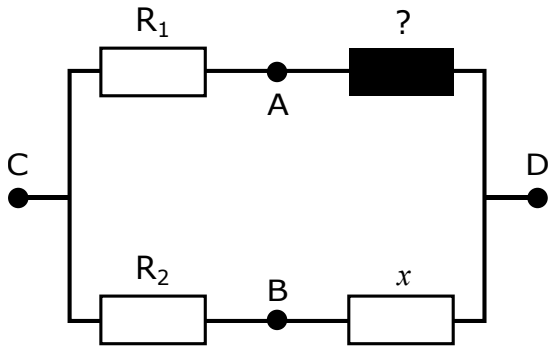
Adott egy felfújt állapotában V térfogatú, jó hőszigetelő anyagból készült, alul nyitott ballon, melynek aljára egy kosár van rögzítve. A ballon és a kosár össztömege m_0, a levegő hőmérséklete és nyomása a ballonon belül mindenütt azonos. A külső levegő hőmérséklete minden magasságban T_0, sűrűsége pedig a talaj felett z magasságban $\varrho(z) = \varrho_0 - \alpha z$, ahol $\alpha > 0$, $z < \varrho_0/\alpha$.

(a) Mekkora hőmérsékletre kell felmelegíteni a ballonban lévő levegőt, hogy éppen felemelkedjen a talajról?

(b) A hőlégballonnal úgy repülnek, hogy a talajon rögzített állapotban T_1 hőmérsékletre melegítik a benne található levegőt, majd bezárják a nyílást, tovább nem melegítik, és eloldják a rögzítést. Milyen magasra repül így a ballon? Mennyi idő alatt jut ebbe a magasságba?

5. feladat (12 pont)

A *Titkok Kamrájának* bejáratához érve Harrynek meg kell határoznia az x-szel jelölt ellenállás értékét az *ábrán* látható elátkozott áramkörben. Csupán két ellenállás értéke ismert, ezek R_1 és R_2. Harry tudja azt is, hogy a kérdőjellel jelölt elem egy mágikus feketedoboz, amely pont úgy néz ki belülről, mint az ábrán látható áramkör (tehát a belsejében van négy ellenállás, melyek közül az egyik szintén egy ugyanilyen feketedoboz, amelyben szintén van négy ellenállás, stb.). A rendszer C és D pontjai közé U_0 feszültségű telep van bekötve. Ekkor egy feszültségmérőt kapcsolva az ábra szerinti A és B pontok közé, szerencsés főhősünk örömmel látja, hogy a készülék 0 V-ot jelez. Gyors fejszámolás után be is jut a kamrába, és már viszi is Hagridnak a kolbászt. Mekkora volt x értéke, amit Harry helyesen kiszámolt?



Használható segédeszközök: író- és rajzolóeszközök, számológép, függvénytáblázat.
A feladatok megoldására 180 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők

XIX. Dürer Verseny

F+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Elméleti feladatsor**

Figyelem! *A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldások számszerű közlése, levezetés és a logikai lépések szöveges indoklása is szükséges (pl. „Newton III. törvénye alapján...”)!*

1. feladat (13 pont)

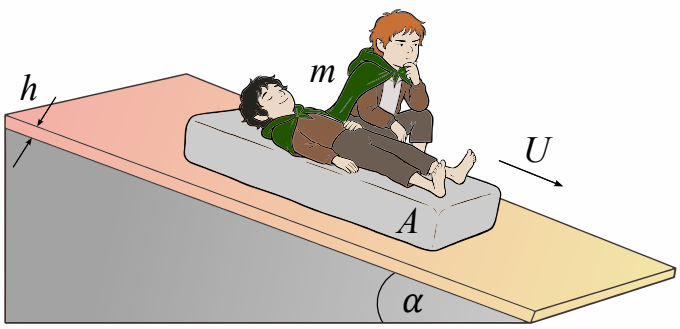
Miután Frodó és Samu belevetették az *Egy Gyűrűt* a *Végzet Hegyének* katlanába, a menekéléshez nem maradt más választásuk, minthogy az α hajlásszögű hegyoldalon lecsorgó láván utazzanak. Ehhez egy nagy méretű, A alapterületű lapos kőre ugrottak, mely hosszú idő után állandó U nagyságú sebességgel halad az egyenletes h vastagságú és ϱ sűrűségű lávarétegen, ahogyan az *ábra* is mutatja. Miközben Frodóban ismét felderengenek a *Megye* rég nem látott képei, Samu elgondolkozik, hogy vajon ki lehetne-e számítani a láva dinamikai viszkozitását a korábbi paraméterek felhasználásával, amennyiben ismert, hogy a kő és a hobbitok együttes tömege m. Segítsünk Samunak megoldani a problémát!

Útmutatás: A megoldás során szükségünk lehet rá, hogy egy összenyomhatatlan newtoni folyadék lamináris áramlása esetében az egyes folyadékrétegek között fellépő (folyadékfelszínnel párhuzamos) úgynevezett nyíróerő a következő alakban írható egydimenziós, x irányú áramlás esetében:

$$F_{\text{viszk}} = \mu A_{\text{h}} \frac{\Delta u}{\Delta y},$$

ahol Δu a szomszédos rétegek közötti x irányú sebességkülönbség, Δy a réteg sebességre merőlegesen vett vastagsága, A_{h} a rétegek közötti határfelület, μ pedig a folyadék dinamikai viszkozitása. További hasznos gondolat lehet, hogy állandósult állapotú, lamináris áramlás esetén a folyadék bármely kis darabja egyensúlyban van.

Megjegyzés: A mordori lávát tekinthetjük az *útmutatásban* leírt módon jellemezhető folyadéknak. A megoldás során a lapos kő lávába történő bemerülését hanyagoljuk el, továbbá feltételezhetjük, hogy a kő együtt mozog a láva legfelső rétegével.

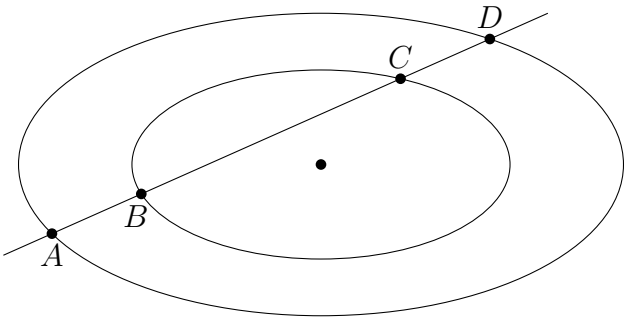


F+
kategória

2. feladat (17 pont)

A düránuszi csillagászok megfigyeltek egy távoli, M tömegű, egyenletes tömegeloszlású galaxist. A galaxis alakja forgástengelye irányában jelentősen lapított, de nem elhanyagolhatóan lapos forgási ellipszoid, R nagyságú fél nagytengellyel. A galaktikus sík egybeesik a miénkkel. A vöröseltolódás-mérések alapján a galaxis két szélén a látóirányú sebességek v_A és v_B. Határozzuk meg a csillagászok mérései alapján a galaxis teljes mozgási energiáját!

Útmutatás: Két koncentrikus, hasonló ellipszisre az *ábra* alapján: $\overline{AB} = \overline{CD}$ teljesül.



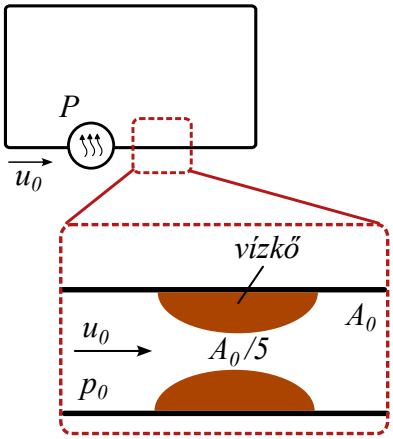
3. feladat (10 pont)

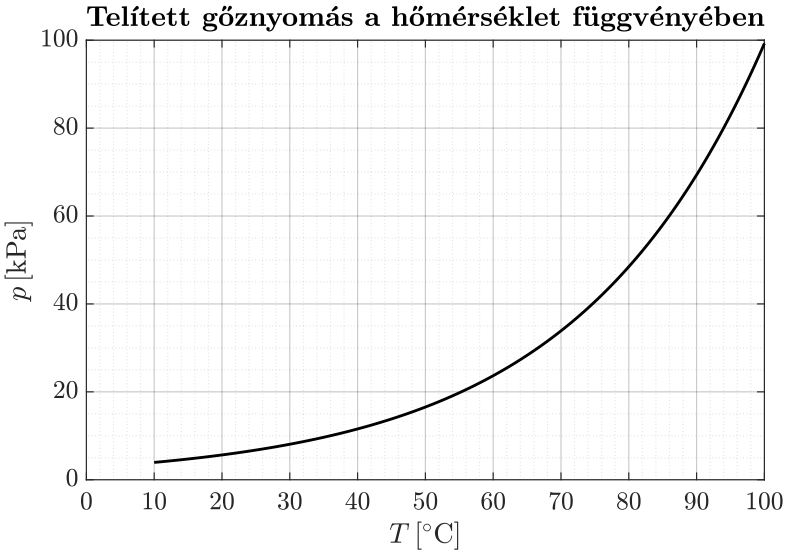
A nagy múltú *Roxfort Boszorkány- és Varázslóképző Szakiskola* csővezetékeiben a kóborló baziliszkuszok mellett kevésbé érdekes, azonban „hasonlóan” veszedelmes dolgok is vannak, például vízkő. A vízkő, bár elsőre ártalmatlannak tűnik, ha lerakódik (például csővezetékekben), akkor keresztmetszet-csökkenést okoz, ezzel növelve az úgynevezett *kavitáció* kialakulásának esélyét. A kavitáció jelensége akkor lép fel, ha a folyadékban a nyomás a telítési gőznyomás alá kerül (határesetben éppen eléri azt), ekkor ugyanis gőzbuborékok keletkeznek. Ezek a buborékok tovább haladnak a folyadékkal, magasabb nyomású szakaszra érve hirtelen összeomlanak, ezzel energiát szabadítva fel és roncsolva a csővezetékek falát. Ezt a jelenséget a varázsvilágban kevésbé ismerik, így a Ti segítségeteket kérik!

Tekintsük az iskolai melegvíz-hálózat egy, az *ábrán* látható zárt keringtetőrendszerét. Ebben az elrendezésben folyamatosan m tömegű, ϱ sűrűségű vizet áramoltatnak u_0 tervezett sebességgel, és p_0 tervezett nyomáson. A víz melegítését a csőbe épített P teljesítményű elektromos fűtőelem biztosítja. Feltételezhetjük, hogy a keringtetett víz hőmérséklete kizárólag a fűtőelemen áthaladva változik, maga a rendszer tökéletesen hőszigetelt és veszteségmentes. A csővezeték egy kritikus szakaszán (közvetlenül a fűtőelem után) az eredetileg D_0 átmérőjű csőkeresztmetszet vízkőlerakódás következtében az eredeti keresztmetszeti terület ötödére csökkent. Legfeljebb mennyi ideig keringtethető a rendszerben a kezdetben T_0 hőmérsékletű víz, hogy elkerüljük a kavitáció kialakulását?

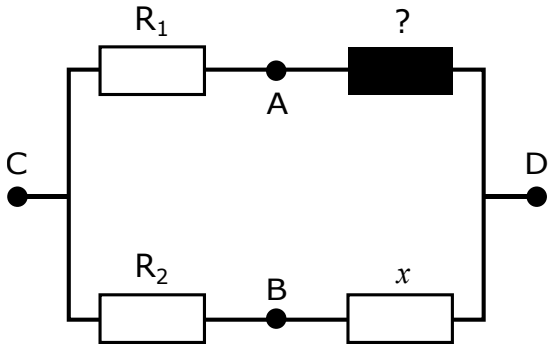
Adatok: $m = 500\,\mathrm{kg}$, $\varrho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $u_0 = 3\,\mathrm{m/s}$, $p_0 = 150\,\mathrm{kPa}$, $P = 20\,\mathrm{kW}$, $D_0 = 50\,\mathrm{mm}$, $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, továbbá a víz fajhője $c_\mathrm{v} = 4180\,\mathrm{J/kg^\circ C}$.

Megjegyzés: A „tervezett” sebesség és nyomásértékek az eredeti D_0 átmérőjű csővezetékre vonatkoznak. A megoldás során feltételezhetjük, hogy a víz összenyomhatatlan folyadék; továbbá tekintsünk el a folyadék és a csövek hőtágulásától. A keringtetőrendszer pozíciója vízszintes.





4. feladat (10 pont)



A *Titkok Kamrájának* bejáratához érve Harrynek meg kell határoznia az x-szel jelölt ellenállás értékét az *ábrán* látható elátkozott áramkörben. Csupán két ellenállás értéke ismert, ezek R_1 és R_2. Harry tudja azt is, hogy a kérdőjellel jelölt elem egy mágikus feketedoboz, amely pont úgy néz ki belülről, mint az ábrán látható áramkör, azzal az egy különbséggel, hogy benne minden ellenállásérték meg van szorozva egy $\alpha > 0$ konstanssal. Tehát a doboz belsejében van négy ellenállás: $\alpha R_1, \alpha R_2, \alpha x$, valamint egy hasonló tulajdonságú doboz, amely szintén α-val szorozza a benne lévő ellenállásokat a körülötte lévőkhöz képest. Tehát az i. doboz belsejében az ellenállások $\alpha^i R_1, \alpha^i R_2, \alpha^i x$, és egy doboz. A rendszer C és D pontjai közé U_0 feszültségű telep van bekötve. Ekkor egy feszültségmérőt kapcsolva az ábra szerinti A és B pontok közé, szerencsés főhősünk örömmel látja, hogy a készülék 0 V-ot jelez. Gyors fejszámolás után be is jut a kamrába, és már viszi is Hagridnak a kolbászt. Mekkora volt x értéke, amit Harry helyesen kiszámolt?

F+
kategória

5. feladat (15 pont)

Adott pillanatban egy pontból elindítunk két m tömegű részecskét. Az elsőnek kicsiny $q > 0$ töltése és $\boldsymbol{v}_0$ kezdősebessége van, a másodiknak $4q$ töltése és $-2\boldsymbol{v}_0$ kezdősebessége. A részecskékre egyetlen erő hat, mely a kiindulóponttól $\boldsymbol{r}_0$ távolságra lévő rögzített $Q < 0$ töltéstől származó elektrosztatikus kölcsönhatás. Legkorábban mennyi idő múlva találkoznak, ha az első részecske periódusideje T?

Megjegyzés: A megoldás során a kicsiny töltések közötti elektrosztatikus kölcsönhatást hanyagoljuk el.

Használható segédeszközök: író- és rajzolóeszközök, számológép, függvénytáblázat.
A feladatok megoldására 180 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők

XIX. Dürer Verseny

F

kategória

Helyi forduló (2025. november 14.) **Megoldókulcs**

1. feladat

Legyen a test sebessége v, amikor éppen elhagyja a körívet. A kezdeti energia megegyezik eddig a pontig a kinetikus energia és a potenciális energia megváltozásának összegével:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1+\cos\alpha). \tag{1.1}$$

Innen a sebesség négyzetét kifejezve:

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1+\cos\alpha). \tag{1.2}$$

A feladatból adott, hogy:

$$v_0^2 = kgR, \tag{1.3}$$

így az előző két egyenlet alapján:

$$v^2 = gR\left[k - 2\left(1+\cos\alpha\right)\right]. \tag{1.4}$$

A körív két végpontja közti mozgás egy ferde hajítás, amelynek kezdősebessége v nagyságú, és α szöget zár be a vízszintessel. A hajítás során megtett vízszintes távolság a feladat szerint éppen megegyezik a rés szélességével:

$$\frac{v^2\sin 2\alpha}{g} = 2R\sin\alpha. \tag{1.5}$$

Behelyettesítve (1.4) eredményét, és kihasználva a kétszeres szögek azonosságát:

$$\frac{gR\left[k-2(1+\cos\alpha)\right]\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2R\sin\alpha. \tag{1.6}$$

Mivel $0° < \alpha < 90°$, ezért $\sin\alpha \neq 0$, tehát oszthatunk vele:

$$\left[k - 2\left(1+\cos\alpha\right)\right]\cos\alpha = 1. \tag{1.7}$$

Ez $\cos\alpha$-ban egy másodfokú egyenlet, nullára rendezve

$$2\cos^2\alpha - (k-2)\cos\alpha + 1 = 0 \tag{1.8}$$

adódik, melynek megoldásai a megoldóképlet alapján:

$$\cos\alpha = \frac{k-2\pm\sqrt{(k-2)^2-8}}{4}. \tag{1.9}$$

(a)

Ez esetben $k=5$, vagyis

$$\cos\alpha = \frac{3\pm 1}{4}. \tag{1.10}$$

A $\cos\alpha = 1$ esethez $\alpha = 0$ tartozik, amely nem megengedett, így $\cos\alpha = 1/2$, tehát:

$$\boxed{\alpha = 60°}. \tag{1.11}$$

(b)

Látható, hogy az (1.9) kifejezés akkor értelmezhető, ha:

$$(k-2)^2 - 8 \geq 0, \tag{1.12}$$

vagyis

$$k \geq 2 + \sqrt{8} = 2 + 2\sqrt{2}, \tag{1.13}$$

avagy

$$2 - \sqrt{8} \geq k. \tag{1.14}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség nyilvánvalóan nem teljesülhet, mivel k pozitív. Tehát k minimális értéke a fentiek szerint:

$$\boxed{k_{\min} = 2 + 2\sqrt{2}}, \tag{1.15}$$

ekkor (1.9) alapján:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{1.16}$$

ennek megoldása pedig:

$$\boxed{\alpha = 45^\circ}. \tag{1.17}$$

2. feladat

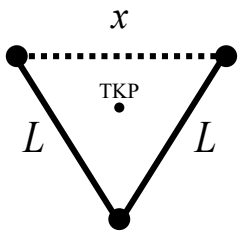
A lendületmegmaradást felírva:

$$mv_0 = 3mv_{\mathrm{TKP}}, \tag{2.1}$$

ahonnan a tömegközéppont sebessége:

$$v_{\mathrm{TKP}} = \frac{v_0}{3}. \tag{2.2}$$

Tehát kezdetben a tömegközéppont lassabb, mint a középső test, így távolodik tőle. Ez nyilván azért történik, mert a két szélső test „lemarad” a középsőhöz képest. Mivel a kötelek végig feszesek, így a három test által meghatározott háromszögnek két oldala L hosszú, a harmadik oldal hosszát pedig jelölje x, ahogy a 2.1. ábra is mutatja. A feladat meghatározni x legkisebb értékét.



2.1. ábra. A rendszer egy későbbi állapota.

Figyeljük meg, hogy amíg x csökken, addig a háromszög súlypontja (ami a rendszer tömegközéppontja) távolodik a középső testtől. Abban a pillanatban, ahogy x eléri a minimumát, ez a távolodás abbamarad, tehát a tömegközéppont rendszeréből nézve éppen ekkor lesz a középső test sebessége nulla. Ez azt jelenti, hogy ekkor ez a test $v_0/3$ sebességgel fog haladni. Ekkor viszont a másik két test is $v_0/3$ sebességgel halad, hiszen a rendszer szimmetrikus, így ez a

két test mindig ugyanakkora sebességgel mozog. Észrevehetjük azt is, hogy ebben a kritikus pillanatban minden sebességvektor párhuzamos $\boldsymbol{v}_0$-al.

Most írjuk fel az energiamegmaradást x legkisebb értékére (azaz a kritikus pillanatban):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 2k\frac{Q^2}{L} + k\frac{Q^2}{2L} = \frac{3}{2}mv_{\mathrm{TKP}}^2 + 2k\frac{Q^2}{L} + k\frac{Q^2}{x}. \tag{2.3}$$

Látható, hogy a szélső golyók és a középső golyó közötti potenciális energia nem változik, hiszen a kötelek hossza is változatlan. Felhasználva továbbá v_{TKP} értékét:

$$\frac{1}{3}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\frac{Q^2}{L} = k\frac{Q^2}{x}, \tag{2.4}$$

innen

$$\boxed{x = \frac{6LkQ^2}{3kQ^2 + 2Lmv_0^2}}. \tag{2.5}$$

3. feladat

(a)

Vizsgáljunk először csak egy lapátot, hiszen a homogén légáramlat (szél) miatt minden lap ugyanakkora forgatónyomatékot fog generálni. Egy lap keresztmetszete az áramlás irányára nézve:

$$A = Ld\cos\varphi. \tag{3.1}$$

A lapátra ható merőleges irányú légellenállási erő nagysága:

$$F_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}A\varrho v_0^2 C_{\mathrm{m}}(\varphi) = \frac{1}{2}A\varrho v_0^2(a - b\varphi^2). \tag{3.2}$$

A lapáttal párhuzamos erő nagysága:

$$F_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}A\varrho v_0^2 C_{\mathrm{p}}(\varphi) = \pi A\varrho v_0^2\varphi. \tag{3.3}$$

Koordináta-rendszerünket vegyük fel úgy, hogy origója a lapát közepe legyen, az x tengely mutasson a szél irányába, a z tengely a lapát rögzítése felé, az y pedig a forgás síkjába. Így a lapátra ható y irányú erő:

$$F_y = F_{\mathrm{m}}\sin\varphi - F_{\mathrm{p}}\cos\varphi. \tag{3.4}$$

Behelyettesítve a (3.2) és (3.3) egyenleteket:

$$F_y = A\varrho v_0^2\left[\frac{(a - b\varphi^2)\sin\varphi}{2} - \pi\varphi\cos\varphi\right]. \tag{3.5}$$

Mivel páros sok lapátból áll a szélkerék, így az x irányú erők forgatónyomatékai kioltják egymást, elég az y irányú erők forgatónyomatékát vizsgálni, ez a (b) részben már nem igaz.

$$M = \frac{L}{2}F_y. \tag{3.6}$$

Ez az x irányba mutat, tehát a szélre merőleges síkban forgat.

Minden lapátra ugyanez írható fel, így a teljes forgatónyomaték N-szer ekkora lesz. Behelyettesítve a (3.1) egyenletből A értékét:

$$\sum M = N\frac{L}{2}Ld\cos\varphi\cdot\varrho v_0^2\left[\frac{(a-b\varphi^2)\sin\varphi}{2}-\pi\varphi\cos\varphi\right]. \tag{3.7}$$

Felhasználhatjuk, hogy kis szögek esetén $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$, így:

$$\sum M \approx N\frac{L}{2}Ld\varrho v_0^2\left[\frac{(a-b\varphi^2)\varphi}{2}-\pi\varphi\right]. \tag{3.8}$$

Továbbá a φ^3-bel arányos tag elhanyagolhatóan kicsi, így a végeredmény:

$$\boxed{\sum M = \frac{1}{4}NL^2d\varrho v_0^2\left(a-2\pi\right)\varphi}. \tag{3.9}$$

Jól látható, hogy a való világban épült szélerőművek lapátjai miért sokkal hosszabbak, mint amilyen szélesek. A fenti képletben a lapát hossza négyzetesen, a szélessége csak lineárisan szerepel.

(b)

Ebben az esetben is ugyanakkora lesz az y irányú erő, mint az (a) részben, azonban a lapátra ható x irányú (széllel párhuzamos) erőnek is lesz forgatónyomatéka, amit semmi nem „egyenlít ki”. Az a probléma ezzel az aszimmetrikus elrendezéssel, hogy a tengelyt terhelő, y irányú eredő forgatónyomaték is lesz. A lapra ható x irányú erő:

$$F_x = F_\mathrm{m}\cos\varphi + F_\mathrm{p}\sin\varphi. \tag{3.10}$$

Behelyettesítve az (a) részben írt erőket:

$$F_x = A\varrho v_0^2\left[\frac{(a-b\varphi^2)\cos\varphi}{2}+\pi\varphi\sin\varphi\right]. \tag{3.11}$$

Innen az y irányú forgatónyomaték:

$$M_y = \frac{L}{2}F_x = \frac{1}{2}L^2d\cos\varphi\varrho v_0^2\left[\frac{(a-b\varphi^2)\cos\varphi}{2}+\pi\varphi\sin\varphi\right]. \tag{3.12}$$

Ismét felhasználva az (a) részben írt közelítéseket:

$$\boxed{M_y \approx \frac{1}{4}L^2d\varrho v_0^2 a}. \tag{3.13}$$

Az x irányú forgatónyomaték változatlan a korábbi esethez képest, így

$$\boxed{M_x = \frac{1}{4}L^2d\varrho v_0^2\left(a-2\pi\right)\varphi}. \tag{3.14}$$

Egy másik probléma ezzel az elrendezéssel, hogy ha a lapát éppen lent van, akkor sokkal nagyobb forgatónyomaték szükséges, hogy egyáltalán mozgásba jöjjön, és utána is nagyon egyenetlen lesz a forgás sebessége.

4. feladat

(a)

A ballon akkor száll fel, amikor a felhajtóerő nagyobb lesz, mint a ballonra ható nehézségi erő. Előbbi:

$$F_\mathrm{f} = \varrho_0 V g, \tag{4.1}$$

a nehézségi erő pedig:

$$F_\mathrm{g} = (m_0 + \varrho_a V) g. \tag{4.2}$$

Itt ϱ_a jelöli a hőlégballonban található levegő sűrűségét. A kritikus pillanatban a testre ható erők egyenlőek, tehát:

$$\varrho_0 V = m_0 + \varrho_a V. \tag{4.3}$$

Innen a kritikus pillanatban a sűrűség:

$$\varrho_a = \varrho_0 - \frac{m_0}{V}. \tag{4.4}$$

A hőlégballonban található levegőre az ideális gázok állapotegyenletét felírva:

$$p_\mathrm{k} V = n_1 R T_a. \tag{4.5}$$

Itt felhasználtuk, hogy a hőlégballonban található gáz nyomása a külső légnyomással egyezik meg, hiszen a légcsere megengedett a két közeg között. A hőmérséklet a kritikus pillanatban T_a. Innen ezt a gáz sűrűségével kifejezve:

$$T_a = \frac{M p_\mathrm{k}}{R \varrho_a}. \tag{4.6}$$

Ide behelyettesítve a (4.4)-ben kapott eredményt:

$$T_a = \frac{M p_\mathrm{k}}{R} \cdot \frac{V}{\varrho_0 V - m_0}. \tag{4.7}$$

Ezt átalakítva:

$$\boxed{T_a = \frac{\varrho_0 V}{\varrho_0 V - m_0} T_0}. \tag{4.8}$$

(b)

A talajszinten a légnyomás ballonon belül és kívül azonos, így érdemes mindkét gáztérben felírni a nyomást. A ballonon kívül:

$$p_0 = \varrho_0 \frac{R T_0}{M}, \tag{4.9}$$

a ballonon belül pedig:

$$p_0 = \varrho_1 \frac{R T_1}{M}. \tag{4.10}$$

Innen a belső sűrűség kifejezhető a hőmérsékletekkel:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{T_0}{T_1}. \tag{4.11}$$

A ballonra mindig a felhajtóerő és a nehézségi erő eredője fog hatni. Előbbinek a nagysága z magassággal a talaj felett:

$$F_\mathrm{f}(z) = \varrho_\mathrm{k}(z) V g. \tag{4.12}$$

A nehézségi erő pedig állandó nagyságú:

$$F_g = (m_0 + \varrho_1 V) g. \tag{4.13}$$

Az eredő erő:

$$\sum F(z) = \varrho_\mathrm{k}(z) V g - (m_0 + \varrho_1 V) g. \tag{4.14}$$

Behelyettesítve a feladatban megadott $\varrho_\mathrm{k}(z)$ értéket:

$$\sum F(z) = -\alpha V g z + (\varrho_0 V - m_0 - \varrho_1 V) g. \tag{4.15}$$

Láthatjuk, hogy az eredő erő utolsó tagja konstans, az első pedig z-vel egyenesen arányos, a kitérés irányával ellentétes irányú. Mivel a teljes tömeg állandó, ebből tudjuk, hogy a hőlégballon harmonikus rezgőmozgást fog végezni valamilyen z_0 egyensúlyi helyzet körül –ha felszáll– akárcsak egy rugóra akasztott test. A z_0 magasságban az eredő erő zérus lesz:

$$\alpha V z_0 = \varrho_0 V - \varrho_1 V - m_0. \tag{4.16}$$

Innen az egyensúlyi z_0 magasság:

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \left(\varrho_0 - \varrho_1 - \frac{m_0}{V} \right). \tag{4.17}$$

A maximális magasság ennek a kétszerese lesz. Felhasználva (4.11)-et:

$$\boxed{z_\mathrm{max} = \frac{2}{\alpha} \left[\varrho_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) - \frac{m_0}{V} \right]}. \tag{4.18}$$

A keresett időt a rezgés periódusidejéből kapjuk. Ehhez a (4.15)-ös egyenletből fejezzük ki a hőlégballon gyorsulását:

$$a(z) = -\frac{\alpha V g}{m_0 + \varrho_1 V} \cdot z + \frac{\varrho_0 V g - \varrho_1 V g - m_0 g}{m_0 + \varrho_1 V}. \tag{4.19}$$

A rugóra akasztott test analógiájából tudjuk, hogy az első tag $-\omega^2 z$-vel feleltethető meg, ahol ω a rezgés körfrekvenciája. Ezt felírva:

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha V g}{m_0 + \varrho_1 V}}. \tag{4.20}$$

Innen a periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + \varrho_1 V}{\alpha V g}}. \tag{4.21}$$

A maximális magasság eléréséig eltelt idő ennek a fele lesz. Felhasználva (4.11)-et:

$$\boxed{t_1 = \pi\sqrt{\frac{m_0 T_1 + \varrho_0 V T_0}{\alpha V g T_1}}}. \tag{4.22}$$

5. feladat

A teljes áramkör ellenállását jelölje R. Ekkor nyilván a kérdőjellel jelölt doboz ellenállása is R, így felírható, hogy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R} + \frac{1}{R_2 + x}, \tag{5.1}$$

ahonnan átrendezés után

$$x = \frac{R_1 R + R^2 - R_1 R_2}{R_1} \tag{5.2}$$

adódik. Mivel a feszültségmérő 0 V-ot jelez, így

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R}{x}, \tag{5.3}$$

amelybe az (5.2) egyenlet szerint x-et helyettesítve:

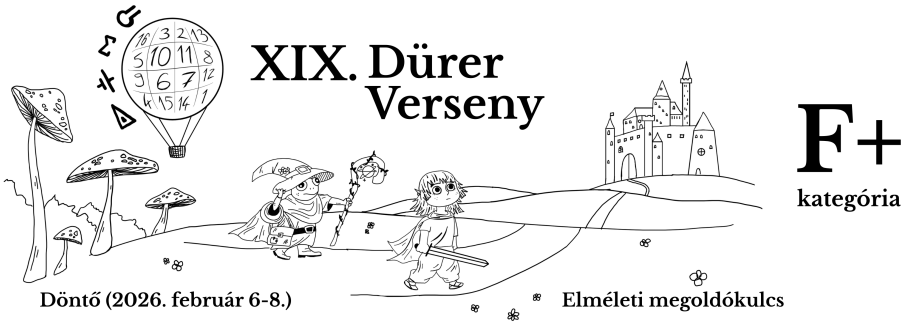
$$R^2 + R(R_1 - R_2) - R_1 R_2 = 0. \tag{5.4}$$

A másodfokú egyenletet megoldva a két megoldás R_2 és $-R_1$, de mivel R pozitív (ahogy R_1 és R_2 is), így az egyetlen fizikai megoldás

$$R = R_2. \tag{5.5}$$

Ezt az (5.2) egyenletbe helyettesítve kapjuk a végeredményt:

$$\boxed{x = \frac{R_2^2}{R_1}}. \tag{5.6}$$



1. feladat

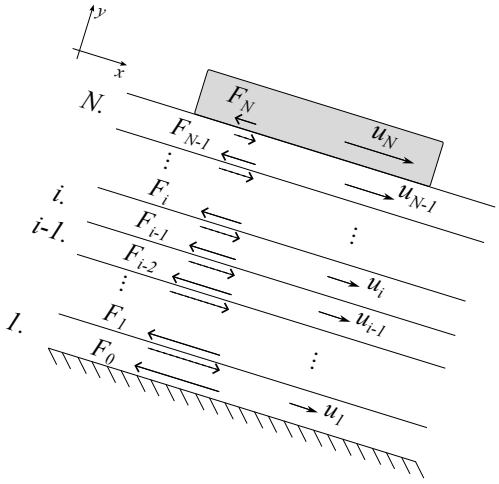
Mivel a feladat szerint „hosszú idő után” a kő állandó nagyságú sebességgel halad a lejtő síkjával párhuzamosan, feltételezhetjük, hogy a láva áramlása már állandósult, és csak a lejtő irányával párhuzamos sebességkomponenssel rendelkezik. Tehát minden folyadékdarabka, valamint a kő is egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, a rá ható erők eredője zérus.

A lejtő irányával párhuzamosan felírva a kőre a dinamika alapegyenletét:

$$mg\sin\alpha = F_\mathrm{f}, \tag{1.1}$$

ahol F_f a kő aljára ható, folyadéktól származó erő (mely egy, a „tapadási súrlódáshoz” hasonló jellengű erőként is elképzelhető, hiszen a felső réteg és a kő együtt mozognak); a feladat nehézsége ennek meghatározásában rejlik.

Az útmutatásban leírt ötletet alkalmazva bontsuk a lávát vékony rétegekre a lejtő síkjával párhuzamosan és vizsgáljuk egy-egy ilyen kicsiny vastagságú réteg mozgását!



1.1. ábra. A láva kicsiny rétegekre bontása.

Legyen az egyenlő vastagságú rétegek száma N, ekkor egy réteg vastagsága $\Delta y = h/N$. Jelölje az i-edik kicsiny réteg lejtővel párhuzamos sebességét u_i. Ekkor az i-edik folyadékréteg tetején (pozitív y) fellépő nyíróerő:

$$F_i = \mu A \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y}. \tag{1.2}$$

Mivel a folyadék is állandósult állapotban van, minden kis rétegnek egyensúlyban kell lennie. Az i-edik rétegre felírva az erőegyensúlyt a lejtővel párhuzamosan:

$$F_{i-1} - F_i = \varrho A \Delta y g \sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad F_i = F_{i-1} - \varrho A \Delta y g \sin\alpha. \tag{1.3}$$

A fenti egyenlet egy rekurzív képletet ad az egyes határfelületeken fellépő nyíróerőre, ezt megoldva F_i-re a következő összefüggés adódik:

$$F_i = F_0 - i\varrho A \Delta y g \sin\alpha, \tag{1.4}$$

ahol F_0 a talajról átadódó erő. Felhasználva (1.1)-et, az N-edik erőre a következő egyenlet írható fel:

$$F_N = F_\mathrm{f} = mg\sin\alpha = F_0 - N\varrho A\Delta y g\sin\alpha. \tag{1.5}$$

Kihasználva, hogy $\Delta y N = h$:

$$mg\sin\alpha = F_0 - \varrho Ahg\sin\alpha, \tag{1.6}$$

azaz a talajról átadódó erő:

$$F_0 = mg\sin\alpha + \varrho Ahg\sin\alpha. \tag{1.7}$$

A legfelső réteg (azaz a kő) állandósult sebességét a kicsiny folyadékrétegek között bekövetkező „sebességugrások” összege adja:

$$U = \sum_{i=1}^{N}(u_i - u_{i-1}), \tag{1.8}$$

amely az (1.2) egyenlet alapján:

$$U = \sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta y}{\mu A}F_i. \tag{1.9}$$

Behelyettesítve (1.4)-et:

$$U = \frac{\Delta y}{\mu A}\sum_{i=1}^{N}\left(F_0 - i\varrho A\Delta y g\sin\alpha\right), \tag{1.10}$$

majd felbontva az összegzést az állandó tagokat kihozva:

$$U = \frac{\Delta y}{\mu A}\left(NF_0 - \varrho A\Delta y g\sin\alpha\sum_{i=1}^{N} i\right). \tag{1.11}$$

A megmaradt összegzés éppen a pozitív egész számok összege 1-től N-ig, melyre használhatjuk a jól ismert $N(N+1)/2$ összegképletet:

$$U = \frac{\Delta y}{\mu A}\left(NF_0 - \varrho A\Delta y g\sin\alpha\frac{N(N+1)}{2}\right). \tag{1.12}$$

Ismét felhasználva, hogy $\Delta y N = h$:

$$U = \frac{h}{\mu A}\left(F_0 - \varrho Ahg\sin\alpha\,\frac{N+1}{2N}\right). \tag{1.13}$$

Behelyettesítve (1.7)-et és csoportosítva a tagokat:

$$U = \frac{mgh\sin\alpha}{\mu A} + \frac{h^2\varrho g\sin\alpha}{\mu}\left(1 - \frac{N+1}{2N}\right) = \frac{mgh\sin\alpha}{\mu A} + \frac{h^2\varrho g\sin\alpha}{\mu}\,\frac{N-1}{2N}. \tag{1.14}$$

A diszkrét modellünk az $N \to \infty$ esetben adja vissza a folytonos folyadékot. Ekkor az N-t tartalmazó tört határértéke 1/2, azaz a kapott összefüggés:

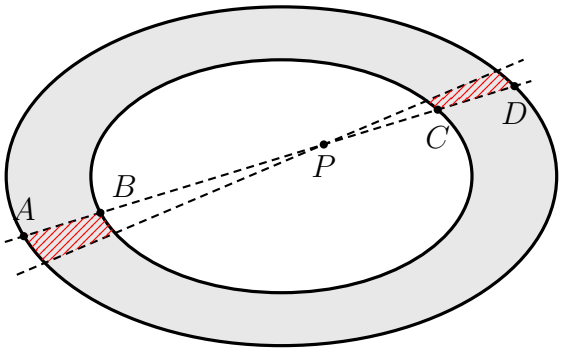
$$U = \frac{mgh\sin\alpha}{\mu A} + \frac{h^2\varrho g\sin\alpha}{2\mu}. \tag{1.15}$$

A fenti kifejezésben már csak a keresett dinamikai viszkozitás az ismeretlen, erre rendezve:

$$\boxed{\mu = \frac{h\sin\alpha}{U}\left(\frac{mg}{A} + \frac{\varrho gh}{2}\right)}. \tag{1.16}$$

2. feladat

Először belátjuk, hogy – a gömb esetével analóg módon – ha egy tömör ellipszoidot hasonló ellipszoidok által határolt héjakra bontunk, egy belső pont csak a belső héjak gravitációs hatását érzi. Tekintsünk egy tetszőleges P pontot az üreges, vékony héj belsejében, és vegyünk két ellentétes irányú, kis $\Delta\Omega$ térszögű kúpot. A kúpok a héjból ΔA_1 és ΔA_2 felületdarabokat metszenek ki r_1 és r_2 távolságokban. A térszög definíciója alapján $\Delta A_i = r_i^2 \Delta\Omega$. Mivel a héjat határoló felületek hasonlóak és koncentrikusak, geometriai tétel, hogy a héj vastagsága látóirányban mérve a két oldalon megegyezik ($AB = CD$ a 2.1. ábrán). A kivágott tömegek aránya tehát csak a távolságok négyzetével arányos ($\Delta m \sim r^2$), ami éppen kiejti a gravitációs erő $1/r^2$-es csökkenését. Így a két szemközti felületelem vonzása semlegesíti egymást.



2.1. ábra. A geometriai tétel illusztrációja a tárgyalt elrendezésben.

A P pontban az összes rajta kívül eső héj gravitációs hatása nulla, mivel az előző érvelés tetszőleges irányra alkalmazható. Azaz a P pont térerősségét kizárólag a ponton átmenő, az eredetivel hasonló belső ellipszoid határozza meg. Tehát egy tetszőleges $\boldsymbol{r}$ helyvektorral jellemezhető pontban a gravitációs térerősség:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = -G\varrho \int_{V_r} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3}\, \mathrm{d}V, \tag{2.1}$$

ahol $\boldsymbol{x}$ a térfogati integrál változója.

Végezzünk el egy λ-szorosára történő nagyítást a teljes rendszeren. Ezzel egy hasonló, de más méretű ellipszoidot kapunk. A pozícióvektorok $\boldsymbol{r}' = \lambda\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{x}' = \lambda\boldsymbol{x}$ és a térfogatelem $\mathrm{d}V' = \lambda^3 \mathrm{d}V$ transzformációja után az integrálból λ kiemelhető. Ekkor arra jutunk, hogy $\boldsymbol{g}(\lambda\boldsymbol{r}) = \lambda\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$, vagyis a térerősség lineárisan függ a helyvektortól.

Felhasználva a galaxis laposságát, jó közelítéssel minden mozgás a galaxis síkjában történik. Ekkor a gravitációs erő galaktikus síkba eső komponense biztosítja az anyag centripetális gyorsulását, így:

$$mg(r) = m\omega^2 r. \tag{2.2}$$

Mivel a gravitációs térerősség lineáris, következik, hogy a galaxis merev testként forog, állandó ω szögsebességgel:

$$v(r) = \omega r. \tag{2.3}$$

A mozgási energia kiszámításához szükségünk van a rendszer tehetetlenségi nyomatékára és a kinematikai adatokra. A tömegközépponti (v_{TK}) és a kerületi (v_{ker}) sebességek a mért adatokból:

$$v_{\mathrm{TK}} = \frac{v_A + v_B}{2}, \quad v_{\mathrm{ker}} = \omega R = \frac{v_A - v_B}{2}. \tag{2.4}$$

A forgási ellipszoid z forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka megegyezik egy R sugarú, M tömegű homogén gömbével, mivel a z irányú lapítás nem változtatja meg a tömegelemek forgástengelytől mért távolságát, tehát $\Theta = 2MR^2/5$. A teljes mozgási energia a tömegközéppont haladásából és az akörül történő forgásból adódik össze:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{TK}}^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}M\left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v_A - v_B}{2R}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Egyszerűsítés után a végeredmény:

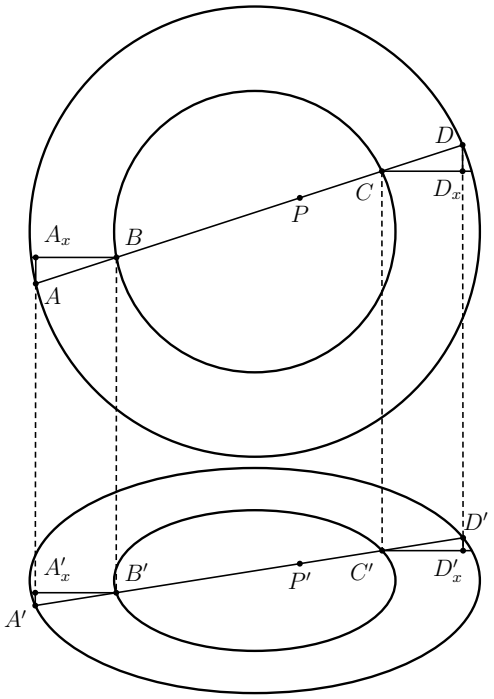
$$\boxed{E_{\mathrm{kin}} = \frac{M}{8}(v_A + v_B)^2 + \frac{M}{20}(v_A - v_B)^2}. \tag{2.6}$$

Megjegyzés

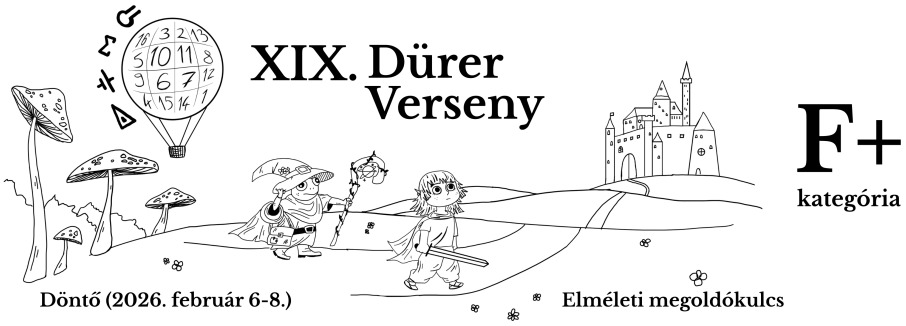
Hogy teljesebb képet kapjunk, az alábbiakban kitérünk a feladat útmutatásában megadott és a megoldás során felhasznált geometriai tétel bizonyítására. Tekintsük ehhez a 2.2. ábrán látható affin transzformációt, amely két koncentrikus kört az esetünkben vizsgált koncentrikus ellipszisekbe visz át.

Metsszük el az eredeti kört egy tetszőleges P belső ponton áthaladó egyenessel, ekkor a metszéspontok rendre A, B, C és D. Legyen továbbá az A pontnak az affinitás irányában B-vel egy magasságba vetített képe A_x. Hasonlóan definiálhatjuk a D_x pontot is. A fenti pontok képei az affin transzformáció után A', B', C', D', A'_x és D'_x.

A kör szelőire könnyen látható, hogy $\overline{AB} = \overline{CD}$, továbbá $\overline{A_xB} = \overline{CD_x}$ és $\overline{A_xA} = \overline{D_xD}$. Az affinitás irányával párhuzamos szakaszok hossza a transzformáció hatására λ-szorosára csökken, míg a merőleges szakaszok hossza változatlan. Így $\overline{A_xB} = \overline{CD_x} = \overline{A'_xB'} = \overline{C'D'_x}$, illetve $\lambda\overline{A_xA} = \overline{A'_xA'}$ és $\lambda\overline{DD_x} = \overline{D'D'_x}$. Mindezekből a Pitagorasz-tétel felhasználásával könnyedén adódik a kívánt végeredmény: $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$.



2.2. ábra. A felhasznált geometriai tétel bizonyítása egy affin transzformáció segítségével.



3. feladat

A feladatban közölt leírás alapján a kavitáció jelenségének szempontjából kritikus szakasz a beszűkült keresztmetszet. Itt ugyanis a kontinuitás törvénye alapján az áramlási sebesség hirtelen növekszik, ez pedig a Bernoulli-törvény értelmében a nyomás hirtelen csökkenését eredményezi, ami éppen a kavitáció kiváltó oka. Elsőként tehát határozzuk meg a kavitációhoz tartozó kritikus gőznyomás értékét!

A beszűkült keresztmetszetben az áramlási sebesség (kontinuitás alapján, összenyomhatatlan folyadékot feltételezve):

$$A_0 u_0 = \frac{A_0}{5} u_1 \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 = 5u_0. \tag{3.1}$$

Bernoulli-törvényét felírva egy a szűkület előtti és a szűkületbeli pontra:

$$p_0 + \frac{1}{2}\varrho u_0^2 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho u_1^2 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\varrho(u_0^2 - u_1^2), \tag{3.2}$$

majd a (3.1) egyenletet felhasználva a szűkületbeli nyomás:

$$p_1 = p_0 - 12\varrho u_0^2 = 42\,\mathrm{kPa}. \tag{3.3}$$

Kavitáció abban az esetben történik, ha a telített gőznyomás eléri a fentiekben kiszámolt nyomásértéket, azaz $p_{\mathrm{kav}} = p_2 = 42\,\mathrm{kPa}$. A mellékelt telített gőznyomás–hőmérséklet grafikon alapján az ehhez tartozó hőmérséklet: $T_{\mathrm{krit}} \approx 76\,^\circ\mathrm{C}$.

Mivel a feladatban közölt ábra alapján a fűtőelem éppen a kritikus keresztmetszet előtt helyezkedik el, ezért a kavitáció jelensége akkor lépne fel, mikor az első, fűtőelemből kilépő folyadékdarabka hőmérséklete eléri T_{krit} értékét. **Tehát a teljes folyadéknak nem kell T_{krit} hőmérsékletre melegednie!**

Határozzuk meg, hogy a fűtőelemen áthaladva mennyivel növekszik a víz hőmérséklete! Ehhez elsőként írjuk fel a tervezett paraméterek mellett kialakuló a tömegáramot:

$$\dot{m} = \varrho \frac{D_0^2 \pi}{4} u_0. \tag{3.4}$$

Ezt felhasználva a hőmérséklet-növekedés:

$$\Delta T_{\mathrm{f}} = \frac{P}{c_{\mathrm{v}} \dot{m}} = \frac{4P}{\pi c_{\mathrm{v}} \varrho u_0 D_0^2} = 0{,}81\,^\circ\mathrm{C}, \tag{3.5}$$

tehát a teljes víztömegnek ennyivel kisebb hőmérsékletet kell elérnie a kritikushoz képest, hogy a kavitáció kialakulhasson. A szükséges hőközlés:

$$Q = c_{\mathrm{v}} m \Delta T = c_{\mathrm{v}} m (T_{\mathrm{krit}} - \Delta T_{\mathrm{f}} - T_0). \tag{3.6}$$

Ez alapján a melegítés időtartama a megadott fűtőteljesítményt felhasználva:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{c_{\mathrm{v}} m (T_{\mathrm{krit}} - \Delta T_{\mathrm{f}} - T_0)}{P}, \tag{3.7}$$

a numerikus értékeket behelyettesítve:

$$\boxed{t = 5767\ \mathrm{s} \approx 96\ \mathrm{min}}. \tag{3.8}$$

4. feladat

A legkülső (ábrán is látható) feketedoboz ellenállását jelölje R_3. Vegyük észre, hogy a teljes rendszer mindössze annyiban különbözik ennek a doboznak a belsejétől, hogy ez utóbbiban minden ellenállás α-szorosa az eredeti áramkör ellenállásértékeinek. Tehát míg az eredeti rendszer i. szintjén a bal felső ellenállás $\alpha^{i-1}R_1$, addig a doboz i. szintjén ugyanez az ellenállás $\alpha^i R_1$. A Kirchhoff- és Ohm-törvények linearitása miatt ez azt jelenti, hogy

$$R_3 = \alpha R_\mathrm{e}, \tag{4.1}$$

ahol R_e a teljes rendszer eredő ellenállását jelenti a C és D pontok között. A felső ágban sorosan kapcsolódik R_1 és R_3, míg az alsó ágban R_2 és az ismeretlen x. Ennek megfelelően a felső, illetve alsó ág eredő ellenállása:

$$R_\mathrm{f} = R_1 + R_3, \tag{4.2}$$

$$R_\mathrm{a} = R_2 + x. \tag{4.3}$$

Az A és B pontok ekvipotenciálisak, vagyis a két pont közötti feszültség zérus. Ez azt jelenti, hogy a felső és alsó ágban azonos arányban oszlik meg a feszültség. Ezért a feszültségosztásra az alábbi összefüggés írható fel:

$$\frac{R_1}{R_\mathrm{f}} = \frac{R_2}{R_\mathrm{a}}. \tag{4.4}$$

A definíciókat behelyettesítve:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{R_2}{R_2 + x}. \tag{4.5}$$

Az egyenletet x-re rendezve:

$$x = \frac{R_2}{R_1} R_3. \tag{4.6}$$

A teljes áramkör eredő ellenállása a két ág párhuzamos kapcsolásából adódik:

$$R_\mathrm{e} = \frac{R_\mathrm{f} R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{f} + R_\mathrm{a}}. \tag{4.7}$$

A (4.5) összefüggés szerint

$$R_\mathrm{a} = \frac{R_2}{R_1} R_\mathrm{f}, \tag{4.8}$$

amit behelyettesítve (4.7)-be, egyszerűsítés után:

$$R_\mathrm{e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_\mathrm{f} \tag{4.9}$$

adódik, amibe (4.2)-t és (4.1)-et helyettesítve:

$$R_3 = \alpha \frac{R_2}{R_1 + R_2}(R_1 + R_3). \tag{4.10}$$

Az egyenletet R_3-ra megoldva:

$$R_3 = \frac{\alpha R_1 R_2}{R_1 + R_2(1-\alpha)}. \tag{4.11}$$

Ebből, valamint a (4.6) összefüggésből a keresett x ellenállás:

$$\boxed{x = \frac{\alpha R_2^2}{R_1 + R_2(1-\alpha)}}. \tag{4.12}$$

5. feladat

1. megoldás

A feladat megoldásához azt kell megérteni, hogyha egy test végigmegy egy pályán, és egy másik kétszer olyan gyorsan megy végig ugyanazon a pályán, akkor az utóbbi sebessége kétszer, gyorsulása négyszer akkora lesz, mint az előbbié.

Ehhez először nézzük meg, hogy mi történne, ha ugyanabba az irányba lőnénk ki külön a részecskéket, de a másodikat az elsőnél kétszer nagyobb sebességgel. Írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = k\frac{Qq}{|\boldsymbol{r}_1|^3}\boldsymbol{r}_1, \qquad m\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = k\frac{4Qq}{|\boldsymbol{r}_2|^3}\boldsymbol{r}_2. \tag{5.1}$$

Tegyük fel, hogy az első egyenlet megoldása $\boldsymbol{r}_1$. Vegyük észre, hogy ekkor az $\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{r}_1(2t)$ hozzárendeléssel megadott $\boldsymbol{r}_2$ függvény megoldása lesz a második egyenletnek. Ennek igazolásához először vizsgáljuk meg a gyorsulások viszonyát a deriválás láncszabálya szerint:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2(t) = 4\ddot{\boldsymbol{r}}_1(2t). \tag{5.2}$$

Az első, $\boldsymbol{r}_1$-re vonatkozó mozgásegyenletet behelyettesítve:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_2(t) = 4m\ddot{\boldsymbol{r}}_1(2t) = 4k\frac{Qq}{|\boldsymbol{r}_1(2t)|^3}\boldsymbol{r}_1(2t) = k\frac{4Qq}{|\boldsymbol{r}_2(t)|^3}\boldsymbol{r}_2(t). \tag{5.3}$$

Ebből tehát látható, hogy a fent definiált $\boldsymbol{r}_2$ valóban kielégíti a második mozgásegyenletet. Így ha az egyik részecske végigmegy valamilyen tetszőleges pályán, akkor elviekben a másik test is végig tud menni ugyanazon pályán, kétszer olyan gyorsan.

De mi határozza meg, hogy milyen pályán mozog a test? A kezdőfeltételek! Tegyük fel, hogy az első test kezdőfeltételei $\boldsymbol{r}_1(0) = \boldsymbol{r}_1(t=0)$ és $\dot{\boldsymbol{r}}_1(0) = \dot{\boldsymbol{r}}_1(t=0)$. Ekkor észrevehetjük, hogy $\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{r}_1(2t)$ illeszthető a második test kezdőfeltételeihez, mivel:

$$\boldsymbol{r}_2(0) = \boldsymbol{r}_1(0), \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2(0) = 2\dot{\boldsymbol{r}}_1(0). \tag{5.4}$$

Tehát a két test valóban ugyanazon a pályán fog mozogni, csak a második kétszer olyan gyorsan, mint az első.

Innen már csak azt kell végiggondolni, hogy min változtat az, hogy a második testet az ellenkező irányba lőjük ki. Csak annyit, hogy ugyanazon pályán az ellenkező irányba fog haladni. A fentiek alapján tehát a megtett utak aránya 1 : 2, és a testek akkor találkoznak, amikor a kettejük által megtett út összege kiadja a teljes pályát. Ez a pálya egyharmadánál lesz, azaz $T/3$ idővel az indítás után.

2. megoldás

A megoldás első lépéseként használjuk ki, hogy egy tetszőleges $q > 0$ töltés pályája egy rögzített $Q < 0$ töltés körül olyan ellipszis, melynek a fél nagytegelye és a q töltés teljes E_t energiája közti összefüggés:

$$E_\mathrm{t} = \frac{kQq}{2a}. \tag{5.5}$$

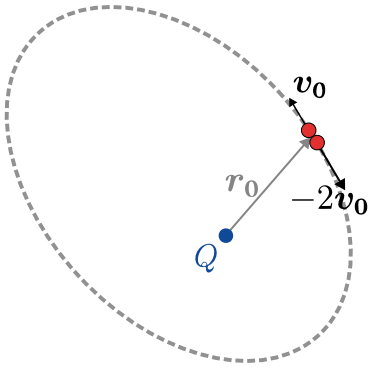
Ezt felhasználva a feladat q töltésére:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{kQq}{r_0} = \frac{kQq}{2a_q}, \tag{5.6}$$

míg a másik kis töltésre:

$$\frac{1}{2}m(2v_0)^2 + \frac{4kQq}{r_0} = \frac{4kQq}{2a_{4q}}. \tag{5.7}$$

Az (5.6) és (5.7) egyenleteket összehasonlítva látszik, hogy utóbbiban egy néggyel való egyszerűsítés után $a_q = a_{4q}$ adódik, azaz a két mozgó töltés pályájának fél nagytengelye ugyanakkora. Mivel a kiinduláskor a két töltés egy pontból indul ellentétes irányú sebességgel, így a pályájuk érintője egyezik és tudjuk, hogy a pályák fókuszpontja és fél nagytengelye is ugyanaz. Ebből következik, hogy a két test egy pályán mozog[1], ahogy az 5.1. ábrán látható.



5.1. ábra. A töltések kiinduló elrendezése és pályája.

Az energiamegmaradás egyenletét a pálya tetszőleges pontjára felírhatjuk. Az (5.6) és (5.7) közti 4-es szorzó miatt egy adott pontban a $4q$ töltés mindig kétszer akkora sebességgel halad, mint a q töltésű test haladna azon pontban. Ezáltal a $4q$ töltés periódusideje $T/2$. (Ez Kepler III. törvényének megfelelő alkalmazásával is adódik.)

[1] Bár az állítás nem teljesen triviális, röviden belátható annak ismeretében, hogy egy ellipszis adott pontjából két fókuszához húzott vezéregyenesek szögfelezője merőleges az ellipszis érintőjére. Konkrétabban, mivel a Q töltés helye, mint fókuszpont és a fél nagytengely adott, az egyetlen szabadsági fokunk a másik fókuszpont helyzete. Ennek különböző megválasztásai esetén a fent említett szögfelező más és más irányú, így az arra merőleges érintők is. Összességében tehát egyedül akkor eshet egybe a két pálya érintője, ha azok második fókuszai, és így a teljes ellipszisek is azonosak.

Összefoglalva, a két töltés ugyanazon pályán halad ellentétes irányban, és az egyik területi sebessége minden pillanatban duplája a másikénak, tehát a töltések azon pontban találkoznak újra, ahol 1:2 arányban súrolták az ellipszis területét. Ide pedig $T/3$ idő elteltével jutnak el az indulástól mérten.

XIX. Dürer Verseny

F

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Mérés feladatsor**

Figyelem! *A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldás számszerű közlése, a mérés lépéseit tartalmazó jegyzőkönyv és a végeredmény hibájára vonatkozó becslés is szükséges!*

A mérés célja

A mérés során egy Bunsen-állványra akasztott matematikai inga lengését vizsgáljuk különböző damilhosszak mellett. A damil hosszának a lengésidőhöz képest lassú változtatása esetén bizonyos mennyiségek megmaradnak a mozgás során, ezek meghatározása a célunk.

Elméleti bevezető

A matematikai inga egy elhanyagolható tömegű, ℓ hosszúságú fonalra függesztett, m tömegű pontszerű testből áll, amelyre szabad erőként csak a nehézségi erő hat. Az inga nyugalmi helyzetéhez képest egy adott időpillanatban a függőlegessel bezárt szöget nevezzük szögkitérésnek (φ). Kis szögek esetén az inga elmozdulását vízszintessel közelítjük, és egy adott magasságban a vízszintes kitérést (x) vizsgálhatjuk. Ennek maximuma az amplitúdó (A).

Mérési eszközök

A mérés során rendelkezésünkre áll egy *Bunsen-állvány*, melynek rúdjához egy gyűrű van rögzítve. Adott még egy *vékony damil,* illetve két *nehezék*, melyekből a damilt a gyűrűn átvetve inga készíthető. Rendelkezésre áll egy *szigetelőszalag* a damil jelöléséhez, emellett adott egy *vonalzó*, mellyel a kitérés amplitúdója mérhető és egy *milliméterpapír* az ábrázoláshoz.

Elméleti feladatok

1. feladat (6 pont)

Tekintsük a fent ismertetett matematikai ingát, amely a $t = 0$ pillanatban $\varphi_{\max} \ll 1\,\mathrm{rad}$ szögkitéréssel, nyugalomból indul. A rendszer paramétereinek lassú változtatása esetén definiálható egy I fizikai mennyiség, az *adiabatikus invariáns*, amely a mozgás során közelítőleg állandó. Ennek alakja a kis kitérésű fonálinga esetén

$$I = mg^{1/2}\ell^{2\alpha}\varphi_{\max}^2,$$

ahol α egy alkalmasan választott kitevő. A fenti megmaradási tételt felhasználva vezessük le a maximális szögkitérés logaritmusa és az inga hosszának logaritmusa közti

$$\ln\left(\varphi_{\max}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{I^2\ell_0^{4\alpha}}{m^2 g}\right) - \alpha\ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)$$

összefüggést! Itt ℓ_0 a fonál kezdeti hosszát jelöli, de helyettesíthető lenne bármilyen más hosszúságdimenziójú paraméterrel is.

XIX. Dürer Verseny

F

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Mérés feladatsor**

Mérési feladatok

2. feladat (5 pont)

Kezdésként a szigetelőszalagból levágott apró darabok segítségével 10 cm-es beosztással jelöljük meg a damilnak kb. 1 m-es szakaszát, majd készítsük el az ingát, a Bunsen-állványt az asztal szélére helyezve. A damil egyik végére kössük rá a súlyt, másik végét vessük át az állvány rúdján és tartsuk kézben, hogy a hosszát változtatni lehessen. A feladat során végig kis kitéréseket használjatok, és óvatosan változtassátok a damil hosszát, **ne vágjátok el a kezetek**!

Állítsuk az inga hosszát a lehető legnagyobbra, majd mérjük meg ekkor a lelógó damil hosszát (ℓ_0). Ezután térítsük ki az ingát, és a vonalzó segítségével az asztal magasságában olvassuk le a lengés amplitúdóját (A). Lassan rövidítve a damil hosszát, olvassuk le a jelölések segítségével, hogy különböző ingahosszakhoz mekkora amplitúdók tartoznak, ezeket jegyezzük fel a *mellékelt táblázatba*! Számoljuk ki a teljes lengési hosszt minden adatpontnál, illetve a maximális szögkitérés tangensét, majd a maximális szögkitérést!

3. feladat (10 pont)

Végezzük el a *2. feladat* lépéseit úgy, hogy a legrövidebb lehetséges damilhosszal kezdünk, és folyamatosan növeljük az inga hosszát! Ezután ismételjük meg még egyszer ezt, vagy a *2. feladat* lépéseit, ezt a döntést a csapatra bízzuk.

4. feladat (14 pont)

Az *1. feladat* alapján az adatokat a megfelelő koordináta-rendszerben ábrázolva egyenes illeszthető az adatpontokra. Számoljuk ki a szükséges mennyiségeket, majd ábrázoljuk így a mérési eredményeinket. A három mérési sorozat eredményeit egy milliméterpapíron szemléltessük, különböző színeket vagy jelöléseket használva. Illesszünk az ábrázolt adatpontokra egyenest, határozzuk meg a meredekségét és az y-tengelymetszetét.

A legjobbnak vélt egyenes mellett illesszük még minden mérési sorozatnál azokat az előzőtől legjobban eltérő egyeneseket is, amelyek még „hihetőek”, azaz éppen áthaladnak nagyjából az összes adatponton! Határozzuk meg ezek meredekségeit és tengelymetszeteit is, majd számoljuk ki belőlük α értékének bizonytalanságát!

Adjuk meg a különböző mérési sorozatokból kapott α értékeket bizonytalanságukkal együtt. Diszkutáljuk mérésünk pontatlanságát, írjuk le, milyen effektusok okozhatták a mérési sorozatok közti eltérést. Diszkutáljuk a tengelymetszetekre kapott eredményeket is.

Segítség: Az α paraméter bizonytalansága meghatározható úgy, hogy kiszámoljuk a hozzá tartozó minimális és maximális értékeket, de alkalmazhatjuk a hibaterjedés szabályait is.

XIX. Dürer Verseny

F

kategória

Döntő (2026. február 6-8.)

Mérés feladatsor

ℓ_0 [cm]	$\Delta\ell$ [cm]	A [cm]	ℓ [cm]	$\operatorname{tg}\varphi_{\max}$	$\varphi_{\max}$ [rad]

A mérés elvégzésére és a jegyzőkönyv megírására 120 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők

XIX. Dürer Verseny

F+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Mérés feladatsor**

Figyelem! *A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldás számszerű közlése, a mérés lépéseit tartalmazó jegyzőkönyv és a végeredmény hibájára vonatkozó becslés is szükséges!*

A mérés célja

A mérés során egy Bunsen-állványra akasztott matematikai inga lengését vizsgáljuk különböző damilhosszak mellett. A damil hosszának a lengésidőhöz képest lassú változtatása esetén bizonyos mennyiségek megmaradnak a mozgás során, ezek meghatározása a célunk.

Elméleti bevezető

A matematikai inga egy elhanyagolható tömegű, ℓ hosszúságú fonalra függesztett, m tömegű pontszerű testből áll, amelyre szabad erőként csak a nehézségi erő hat. Az inga nyugalmi helyzetéhez képest egy adott időpillanatban a függőlegessel bezárt szöget nevezzük szögkitérésnek (φ). Kis szögek esetén az inga elmozdulását vízszintessel közelítjük, és egy adott magasságban a vízszintes kitérést (x) vizsgálhatjuk. Ennek maximuma az amplitúdó (A).

Mérési eszközök

A mérés során rendelkezésünkre áll egy *Bunsen-állvány*, melynek rúdjához egy gyűrű van rögzítve. Adott még egy *vékony damil,* illetve két *nehezék*, melyekből a damilt a gyűrűhöz csatolt *dión* átvetve inga készíthető. Rendelkezésre áll egy *szigetelőszalag* a damil jelöléséhez, emellett adott egy *vonalzó*, mellyel a kitérés amplitúdója mérhető és egy *milliméterpapír* az ábrázoláshoz.

Elméleti feladatok

1. feladat (5 pont)

Tekintsük a fent ismertetett matematikai ingát, amely a $t = 0$ pillanatban $\varphi_{\max} \ll 1\,\mathrm{rad}$ szögkitéréssel, nyugalomból indul. Fejezzük ki a φ szögkitérést és a felfüggesztési ponton áthaladó, a fonálra merőleges tengelyre vonatkozó J perdületet, mint az idő függvényeit! Az időt kiküszöbölve határozzuk meg és ábrázoljuk a $\varphi - J$ síkon, azaz a *fázistéren*, a mozgást jellemző trajektóriát!

2. feladat (3 pont)

Számítsuk ki a fázistérbeli trajektória által közrezárt I területet! Ez a mennyiség a rendszer paramétereinek lassú változtatása esetén közelítőleg állandó, ezért neve *adiabatikus invariáns.*

F+
kategória

3. feladat (3 pont)

Az adiabatikus invariáns megmaradásának feltételét felhasználva vezessük le a maximális szögkitérés logaritmusa és az inga hosszának logaritmusa közti

$$\ln\left(\varphi_{\max}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{I^2\ell_0^3}{m^2 g}\right) - \frac{3}{4}\ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)$$

összefüggést! Itt ℓ_0 a fonál kezdeti hosszát jelöli, de helyettesíthető lenne bármilyen más hosszúságdimenziójú paraméterrel is.

Mérési feladatok

4. feladat (4 pont)

Kezdésként a szigetelőszalagból levágott apró darabok segítségével 10 cm-es beosztással jelöljük meg a damilnak kb. 1 m-es szakaszát, majd készítsük el az ingát, a Bunsen-állványt az asztal szélére helyezve. Figyeljetek arra, hogy a damil a dió csavarjának menetén haladjon keresztül, hogy ne tudjon elcsúszni. A damil egyik végére kössük rá a súlyt, másik végét vessük át az állványra szerelt dión és tartsuk kézben, hogy a hosszát változtatni lehessen. A feladat során végig kis kitéréseket használjatok, és óvatosan változtassátok a damil hosszát, **ne vágjátok el a kezetek**!

Állítsuk az inga hosszát a lehető legnagyobbra, majd mérjük meg ekkor a lelógó damil hosszát (ℓ_0). Ezután térítsük ki az ingát, és a vonalzó segítségével az asztal magasságában olvassuk le a lengés amplitúdóját (A). Lassan rövidítve az ingát, olvassuk le a jelölések segítségével, hogy különböző ingahosszakhoz mekkora amplitúdók tartoznak, ezekből és az aktuális damilhosszból már minden releváns mennyiség meghatározható.

5. feladat (8 pont)

Végezzük el a *4. feladat* lépéseit úgy, hogy a lehető legrövidebb ingával kezdünk, és folyamatosan növeljük a damil hosszát! Ezután ismételjük meg még egyszer ezt, vagy a *4. feladat* lépéseit, ezt a döntést a csapatra bízzuk.

6. feladat (12 pont)

Az *elméleti feladatok* alapján az adatokat a megfelelő koordináta-rendszerben ábrázolva egyenes illeszthető az adatpontokra. Számoljuk ki a szükséges mennyiségeket, majd ábrázoljuk így a mérési eredményeinket. A három mérési sorozat eredményeit egy milliméterpapíron szemléltessük, különböző színeket vagy jelöléseket használva. Illesszünk az ábrázolt adatpontokra egyenest, határozzuk meg a meredekségét és az y-tengelymetszetét.

A legjobbnak vélt egyenes mellett illesszük még minden mérési sorozatnál azokat az előzőtől legjobban eltérő egyeneseket is, amelyek még „hihetőek”, azaz éppen áthaladnak nagyjából az

összes adatpont hibatartományán! Határozzuk meg ezek meredekségeit és tengelymetszeteit is, majd számoljuk ki belőlük ezen értékek bizonytalanságait minden mérési sorozat esetén!

A három mérési sorozatból kapott eredményeket összesítve számoljuk ki a mért meredekséget hibájával együtt. Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket az *elméleti feladatok* során levezetett összefüggéssel! Ha eltérést tapasztalunk, mi okozhatta azt? Diszkutáljuk a tengelymetszetek eredményét is!

Segítség: Egy $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ függvény abszolút hibáját a hibaterjedésnek megfelelően az alábbi egyenlettel számolhatjuk:

$$\Delta f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial a_2}\right| \Delta a_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

Itt Δa_i az a_i paraméter abszolút hibája.

A mérés elvégzésére és a jegyzőkönyv megírására 120 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők

XIX. Dürer Verseny

F+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Mérés feladatsor**

Táblázat

A mérési feladatok során szükség lehet adatok és azokból számított egyéb mennyiségek lejegyzésére, ehhez nyújt segítséget az alábbi *táblázat*. Ennek használata természetesen nem kötelező, a döntést az adott csapatra bízzuk.

XIX. Dürer Verseny

F
kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Mérés megoldókulcs**

Elméleti feladatok

1. feladat

Az adiabatikus invariáns feladatban megadott képletét és annak mozgásállandó tulajdonságát felhasználva a szögamplitúdó kifejezhető, mint a fonál hosszának függvénye:

$$\varphi_{\max} = \sqrt[4]{\frac{I^2}{m^2 g \pi^2}} \cdot \ell^{-\alpha}. \tag{1}$$

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve a következő összefüggésre jutunk:

$$\ln\left(\varphi_{\max}\right) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I^2}{m^2 g \ell^{4\alpha} \pi^2}\right). \tag{2}$$

A jobb oldali logaritmus argumentumában szereplő törtet bővíthetjük a kezdeti ℓ_0 fonálhossz 4α-dik hatványával. Ezt követően logaritmikus azonosságokat felhasználva a jobb oldal különbséggé alakítható:

$$\boxed{\ln\left(\varphi_{\max}\right) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I^2}{m^2 g \ell_0^{4\alpha} \pi^2}\right) - \alpha \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)}. \tag{3}$$

Mérési feladatok

Minden damilhossz esetén feljegyeztük az amplitúdókat az utasításoknak megfelelően, ezek az 1. táblázatban láthatóak.

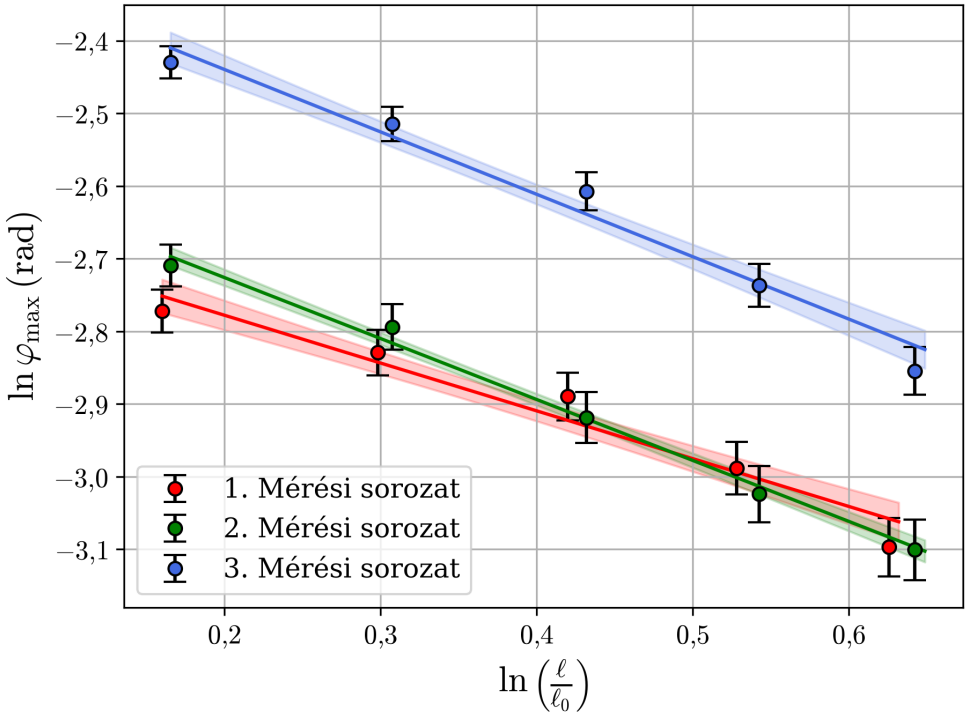
ℓ_0 [cm]	$\Delta\ell$ [cm]	A [cm]	ℓ [cm]	$\operatorname{tg}\varphi_{\max}$	$\varphi_{\max}$ [rad]
57,5	10	3,6	67,5	0,063	0,063
57,5	20	3,4	77,5	0,059	0,059
57,5	30	3,2	87,5	0,056	0,056
57,5	40	2,9	97,5	0,050	0,050
57,5	50	2,6	107,5	0,045	0,045
55,5	10	3,7	65,5	0,067	0,067
55,5	20	3,4	75,5	0,061	0,061
55,5	30	3,0	85,5	0,054	0,054
55,5	40	2,7	95,5	0,049	0,049
55,5	50	2,5	105,5	0,045	0,045
55,5	10	4,9	65,5	0,088	0,088
55,5	20	4,5	75,5	0,081	0,081
55,5	30	4,1	85,5	0,074	0,074
55,5	40	3,6	95,5	0,065	0,065
55,5	50	3,2	105,5	0,058	0,058

1. táblázat. Bal oldalon a három mérési sorozat eredménye, ahol ℓ_0 a vonalzó és a felfüggesztés távolsága, $\Delta\ell$ a vonalzó és a súly távolsága, A a vonalzón mért kitérés. Jobb oldalon az ezekből számolt adatok: az ℓ teljes lengési hossz, valamint a $\varphi_{\max}$ maximális kitérési szög és annak tangense.

A vonalzó magasságában a damilhossz ℓ_0, így a $\varphi_{\max}$ szöget az alábbi módon számolhatjuk:

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{A}{\ell_0}\right). \tag{4}$$

A (3)-as egyenletnek megfelelően az $\ln\varphi_{\max}$ értékeket $\ln(\ell/\ell_0)$ függvényében ábrázolva kapjuk az 1. ábrát.



1. ábra. A mért maximális szögkitérés logaritmusa ábrázolva a damilhossz logaritmusának függvényében mindegyik mérési sorozat esetén. A satírozott 1σ-sáv jelöli az illesztés bizonytalanságát.

Az illesztésből meghatározható a meredekség, ez látható a 2. táblázatban. A meredekség hibáját mi numerikusan az illesztésből becsültük; a versenyzőktől a két „még éppen illeszkedő egyenes” illesztése volt elvárt, ezek meredekségével becsülhetjük a hibát.

	α	$\Delta\alpha$
1. mérés	0,66	0,09
2. mérés	0,84	0,05
3. mérés	0,86	0,08

2. táblázat. A különböző méréssorozatokra illesztett α értékek és hibáik.

A három mérési sorozatot átlagolva kapjuk a végeredményünket:

$$\alpha = (0{,}78 \pm 0{,}07). \tag{5}$$

Az illesztésekből a függőleges tengelymetszet is meghatározható, ez jól láthatóan eltér a három mérési sorozat esetén. Mivel ez függ a kezdeti szögamplitúdótól, így nem meglepő a kapott eredmény. Az is látható, hogy a tengelymetszet nem zérus, ez is egyezik a várakozásainkkal.

XIX. Dürer Verseny

F+
kategória

Döntő (2026. február 6-8.)

Mérés megoldókulcs

Elméleti feladatok

1. feladat

A fonálinga általános mozgása igen bonyolult, és felsőbb matematikai eszközöket igényel, azonban az általunk vizsgált kis kitérésű határesetben a mozgásegyenlet jól ismert módon a harmonikus rezgőmozgás alapegyenletére redukálódik. Ekkor a szögkitérés időfüggése egyszerűen kifejezhető:

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega t)\,. \tag{1}$$

Itt $\omega = \sqrt{g/\ell}$ a rezgőmozgás körfrekvenciája. A pillanatnyi szögsebesség a fenti összefüggés időderiváltjaként, vagy pedig a rezgőmozgás nevezetes összefüggéseinek ismeretében kapható:

$$\dot{\varphi}(t) = -\varphi_{\max}\omega \sin(\omega t)\,. \tag{2}$$

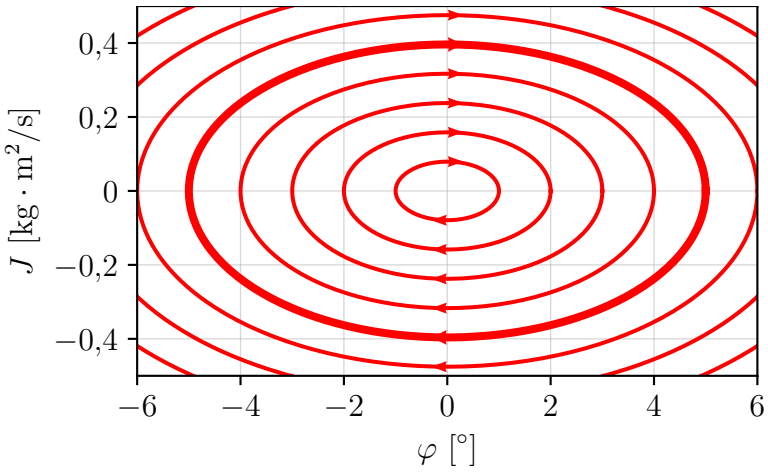
A perdület pedig ezen szögsebesség és a testnek a forgástengelyre vonatkoztatott $m\ell^2$ tehetetlenségi nyomatéka szorzataként adódik:

$$J = m\ell^2\dot{\varphi} = -m\ell^2\varphi_{\max}\omega \sin(\omega t)\,. \tag{3}$$

Az (1) és (3) egyenletekből a szögfüggvényeket kifejezve, továbbá a $\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t) = 1$ trigonometriai összefüggést felhasználva az idő kiküszöbölhető. Rendezés után az alábbi egyenletre jutunk:

$$\boxed{\frac{\varphi^2}{\varphi_{\max}^2} + \frac{J^2}{\left(m\ell^2\varphi_{\max}\omega\right)^2} = 1}\,. \tag{4}$$

Ez jól láthatóan egy ellipszis egyenlete, amelynek főtengelyei rendre $\varphi_{\max}$ és $m\ell^2\varphi_{\max}\omega$. A trajektóriát ábráolhatjuk is a $\varphi - J$ síkon, ezt az 1. ábra mutatja.



1. ábra. A rendszer fázistérbeli trajektóriájának ábrázolása $m = 100\,\mathrm{g}$, $\ell = 40\,\mathrm{cm}$ és különböző $\varphi_{\max}$ szögamplitúdók mellett. A $\varphi_{\max} = 5°$ esetet vastaggal jelöltük.

2. feladat

Az adiabatikus invariáns a megadott definíció szerint az előző feladatban kapott ellipszis területe, azaz a féltengelyek szorzatának π-szerese. Behelyettesítve:

$$I = m\ell^2\varphi_{\max}^2\omega\pi. \tag{5}$$

Felhasználva továbbá a körfrekvenciára vonatkozó, korábban már említett $\omega = \sqrt{g/\ell}$ összefüggést, az adiabatikus invariáns kifejezhető a rendszer alapvető paraméterei és a szögamplitúdó segítségével:

$$\boxed{I = mg^{1/2}\ell^{3/2}\varphi_{\max}^2\pi}. \tag{6}$$

3. feladat

Az adiabatikus invariáns (6) képletét és annak mozgásállandó tulajdonságát felhasználva a szögamplitúdó kifejezhető, mint a fonál hosszának függvénye:

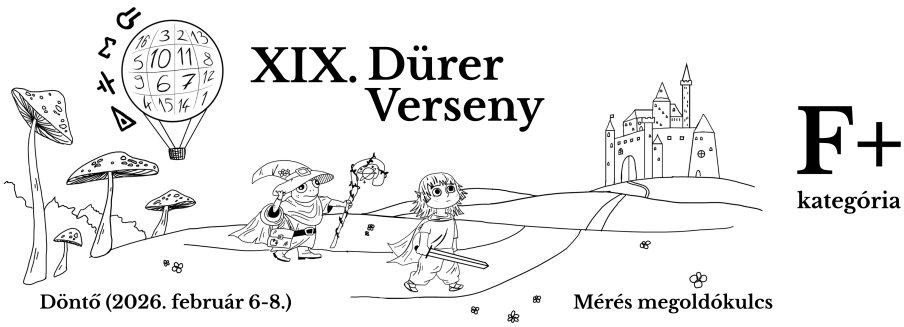
$$\varphi_{\max} = \sqrt[4]{\frac{I^2}{m^2g\pi^2}} \cdot \ell^{-3/4}. \tag{7}$$

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve a következő összefüggésre jutunk:

$$\ln\left(\varphi_{\max}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{I^2}{m^2g\ell^3\pi^2}\right). \tag{8}$$

A jobb oldali logaritmus argumentumában szereplő törtet bővíthetjük a kezdeti ℓ_0 fonálhossz köbével. Ezt követően logaritmikus azonosságokat felhasználva a jobb oldal különbséggé alakítható:

$$\boxed{\ln\left(\varphi_{\max}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{I^2}{m^2g\ell_0^3\pi^2}\right) - \frac{3}{4}\ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)}. \tag{9}$$



Mérési feladatok

Minden damilhossz esetén feljegyeztük az amplitúdókat, ezek az 1. táblázatban láthatóak. Az egész mérés során csak ennek a két paraméternek a hibája terjed.

ℓ_0 [cm]	$\Delta\ell$ [cm]	A [cm]	ℓ [cm]	$\operatorname{tg}\varphi_{\max}$	$\varphi_{\max}$ [rad]
57,5	10	3,6	67,5	0,063	0,063
57,5	20	3,4	77,5	0,059	0,059
57,5	30	3,2	87,5	0,056	0,056
57,5	40	2,9	97,5	0,050	0,050
57,5	50	2,6	107,5	0,045	0,045
55,5	10	3,7	65,5	0,067	0,067
55,5	20	3,4	75,5	0,061	0,061
55,5	30	3,0	85,5	0,054	0,054
55,5	40	2,7	95,5	0,049	0,049
55,5	50	2,5	105,5	0,045	0,045
55,5	10	4,9	65,5	0,088	0,088
55,5	20	4,5	75,5	0,081	0,081
55,5	30	4,1	85,5	0,074	0,074
55,5	40	3,6	95,5	0,065	0,065
55,5	50	3,2	105,5	0,058	0,058

1. táblázat. Bal oldalon a három mérési sorozat eredménye, ahol ℓ_0 a vonalzó és a felfüggesztés távolsága, $\Delta\ell$ a vonalzó és a súly távolsága, A a vonalzón mért kitérés. Jobb oldalon az ezekből számolt adatok: az ℓ teljes lengési hossz, valamint a $\varphi_{\max}$ maximális kitérési szög és annak tangense.

A vonalzó magasságában a damilhossz ℓ_0, így a $\varphi_{\max}$ szöget az alábbi módon számolhatjuk:

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{A}{\ell_0}\right). \tag{10}$$

A hibaterjedés képletét felhasználva:

$$\Delta\varphi_{\max} = \left|\frac{\partial\varphi_{\max}}{\partial A}\right|\Delta A + \left|\frac{\partial\varphi_{\max}}{\partial \ell_0}\right|\Delta\ell_0. \tag{11}$$

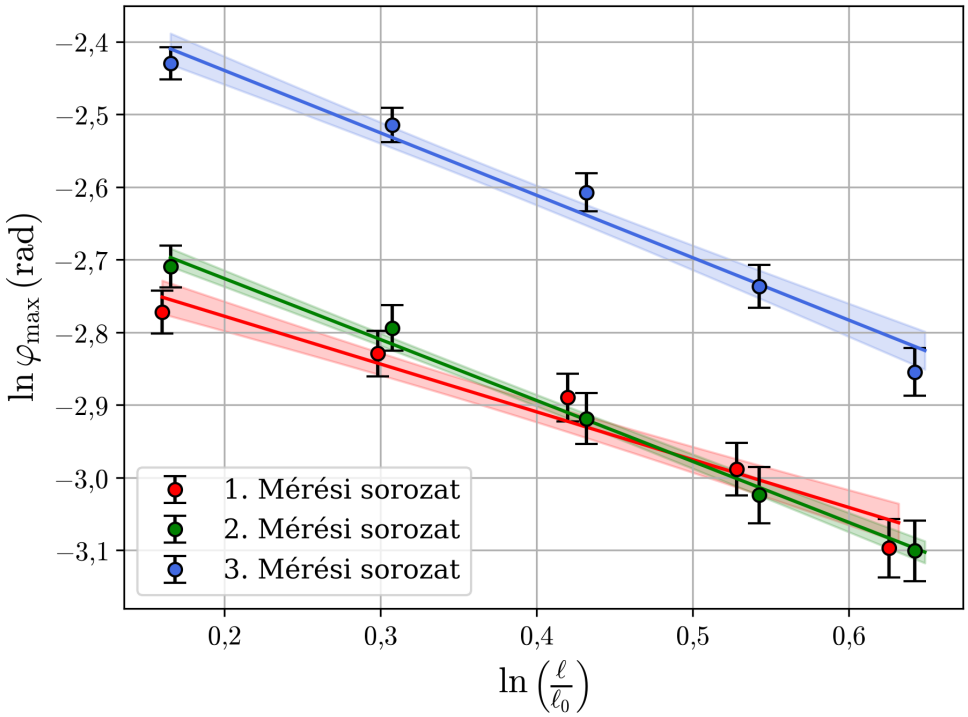
Elvégezve a deriválásokat, megkapjuk $\varphi_{\max}$ hibáját:

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{\ell_0\Delta A + A\Delta\ell_0}{\ell_0^2 + A^2}. \tag{12}$$

Könnyen látható, hogy

$$\Delta(\ln \varphi_{\max}) = \frac{\Delta\varphi_{\max}}{\varphi_{\max}}. \tag{13}$$

A (9)-es egyenletnek megfelelően az $\ln \varphi_{\max}$ értékeket $\ln(\ell/\ell_0)$ függvényében ábrázolva kapjuk az 2. ábrát. Ezen feltüntettük $\ln \varphi_{\max}$ hibáit is.



2. ábra. A mért maximális szögkitérés logaritmusa ábrázolva a damilhossz logaritmusának függvényében mindegyik mérési sorozat esetén. A satírozott 1σ-sáv jelöli az illesztés bizonytalanságát.

Az illesztésből meghatározható a meredekség, ez látható a 2. táblázatban. A meredekség hibáját mi numerikusan az illesztésből becsültük; a versenyzőktől a két „még éppen illeszkedő egyenes” illesztése volt elvárt, ezek meredekségével becsülhetjük a hibát.

	α	$\Delta\alpha$
1. mérés	0,66	0,09
2. mérés	0,84	0,05
3. mérés	0,86	0,08

2. táblázat. A különböző méréssorozatokra illesztett α értékek és hibáik.

A három mérési sorozatot súlyozott átlagából kapjuk a végeredményünket:

$$\boxed{\alpha = (0{,}81 \pm 0{,}04)}\,. \tag{14}$$

Ez hibahatáron belül egyezik az elméleti várakozásunkkal, jó volt tehát a modellünk. Az illesztésekből a függőleges tengelymetszet is meghatározható, ez jól láthatóan eltér a három mérési sorozat esetén. Mivel ez függ a kezdeti szögamplitúdótól, így nem meglepő a kapott eredmény. Az is látható, hogy a tengelymetszet nem zérus, ez is egyezik a várakozásainkkal.

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - F kategória

						Kifejtős forduló						Mérési forduló	Össz
Hely	**Csapatnév**	**Tagok**	**Évf.**	**Iskola**	**Felkészítő tanárok**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**Σ**		
1.	**.**	Vojcsik Liliom Malinkó Dioméd Hornyák Zalán Zétény	12. 12. 11.	Földes Ferenc Gimnázium; Miskolc	Biró István, Pál Mihály, Kovács Benedek	7	14	8		12	**41**	**26**	**67**
2.	**Dormientes**	Szabó András Ďurčovič Ádám Klenkó Éva Borbála	11. 12. 11.	Selye János Gimnázium; Komárom	Hevesi Anikó, Vörös Marianna	11	1	7	9	12	**40**	**25**	**65**
3.	**枇杷膏**	Bana Ilona Papp Gábor Horváth Botond	11. 11. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium; Budapest	Zsigri Ferenc	9	10	9	1	10	**39**	**24**	**63**
4.	**Oldton**	Szabó András Szilágyi Balázs Hartai Boglárka	12. 12. 11.	Földes Ferenc Gimnázium; Miskolc	Biró István	8	0	0	9	12	**29**	**31**	**60**
5.	**Team PP**	Palatinszky Ábel Gerlei Dániel Bibok Zsófia Erika	12. 11. 12.	Városmajori Gimnázium; Budapest	Palkovics Péter	11	0	8	3	9	**31**	**28**	**59**
6.	**rázórosta**	Tasnádi Zsófia Lázin Vince Szeidemann Ábel	12. 11. 12.	Eötvös József Gimnázium és Kollégium; Tata	Szeidemann Ákos	9	0	7	5	4	**25**	**32**	**57**
7.	**Apáczai fizikusai**	Pozsonyi Márk Serfőző Antal Moravcsik Emese	11. 11. 11.	ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium; Budapest	Szentiványszki Soma	9	6	1	5	4	**25**	**30**	**55**
8.	**CsomóKúp**	Ferencz Kevin Jen Lilla Laura Tarján Ferenc	11. 11. 12.	Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest	Marsiczki Roland, Csikós Viktória	8	2	1	2	12	**25**	**23**	**48**
9.	**citromfa**	Galuska-Tomsits Ádin Bischoff Ervin Vilmos Bubálik Nóra	12. 12. 11.	Városmajori Gimnázium; Budapest	Palkovics Péter	4	0	3	2	12	**21**	**21**	**42**
10.	**Dr. Oetker**	Árpási Sarolta Hegedűs Márk Parditka Farkas Lel	11. 11. 11.	ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium; Budapest	Szentiványszki Soma János	3	9	0	1		**13**	**26**	**39**

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - F+ kategória

						Kifejtős forduló						Mérési forduló	Össz
Hely	**Csapatnév**	**Tagok**	**Évf.**	**Iskola**	**Felkészítő tanárok**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**Σ**		
1.	**A kos**	Erdélyi Dominik Tóth Kolos Barnabás Pázmándi József Áron	12. 12. 10.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Schramek Anikó, Sarkadi Tamás, Beke Márton, Csóka Péter, Bencz Benedek, Szentgyörgyi Ádám, Skaper Zsigmond, Elekes Dorottya	12	12	9	7	9	**49**	**31**	**80**
2.	**Szilvás buktát, mert azt szeretem**	Papp Emese Petra Hetényi Lőrinc Takách Máté	11. 11. 12.	ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium; Budapest	Basa István, Deák Márta, Gyertyán Attila, Szentivánszki Soma	6	10	10	10	8	**44**	**32**	**76**
3.	**Petit Napoleon**	Elekes Panni Vincze-Pál András Zádori Gellért	11. 12. 12.	Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium; Budapest Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium; Budapest Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium; Szeged	Izsa Éva, Mike Péter, Rácz Ildikó	8,5	1	9	4	7,5	**30**	**32**	**62**
4.	**Gigamegapingvinek**	Tajta Sára Czirják Márton Szabó-Komoróczki Csenge	12. 12. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Csefkó Zoltán, Dr. Nagy Piroska Mária, Ábrám László, Schramek Anikó	13	1	7	7	3	**31**	**28**	**59**
5.	**Főnix**	Zólomy Csanád Zsolt Beke Márton Csaba Mondovics Gábor Dániel	12. 12. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium; Budapest	Schramek Anikó, Török László	11	-	9	3	9	**32**	**25**	**57**