Dürer Verseny

2026. február 6-8.

C D E+

XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős feladatsor**

---

1. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Törpilla, Törpliliom, Törpvirág, Dulifuli, Okoska és Ügyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

- Törpilla: Közvetlenül utánam Okoska vagy Ügyi érkezett be, valamint Dulifuli és köztem pontosan három törp végzett.
- Törpliliom: Törpvirág, Dulifuli és Okoska is előttem ért be.
- Törpvirág: 5. lettem.
- Dulifuli: Nem szeretek dobogón végezni és nem is kerültem oda.
- Okoska: Nem Dulifuli és nem Ügyi ért be közvetlenül utánam.
- Ügyi: 2. lettem és a dobogón Törpilla és Okoska szerepelt velem együtt.

Milyen sorrendben végzett a hat törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

2. Adott 2026 négyzet egy sorban. Mutassátok meg, hogy akárhogyan írunk relációs jeleket ($<$, vagy $>$) a négyzetek közé, mindig ki lehet tölteni a négyzeteket az $1, 2, \ldots, 2026$ számokkal úgy, hogy minden négyzetbe egy szám kerüljön, minden számot egyszer használjunk és teljesüljenek a relációk!
Az ábrán látható egy példa öt négyzetre valamilyen relációs jelekkel, és egy helyes kitöltéssel az $1, 2, 3, 4, 5$ *számokkal.*

$$\boxed{4} > \boxed{2} > \boxed{1} < \boxed{5} > \boxed{3}$$

3. Merlinnek van sok üres doboza egymás mellett. Arthur beletesz az első dobozba valahány kavicsot, majd megad egy 1-nél nagyobb k egész számot. Ezután Merlin a második dobozba annyi kavicsot tesz, amennyi az első dobozban lévő kavicsok számának k-szorosa. Merlin ezt ismételgetve minden dobozba az eggyel korábbi dobozban lévő kavicsok számának k-szorosát teszi. Ha a bekerülő kavicsok számának nem lenne közös számjegye az előző dobozban lévők számával, akkor azt már nem teszi bele és abbahagyja a kavicspakolgatást. Ha valamelyik dobozba 1000-nél több kavics kerülne, akkor azt már nem teszi bele és szintén abbahagyja. Végül Merlin annyi aranyat ad Arthurnak, ahány dobozban van kavics. Legfeljebb hány aranyat szerezhet Arthur?

Például, ha Arthur az első dobozba 23 *kavicsot tesz és a* 4*-es számot adja meg, akkor a második dobozba* 92 *darab kerül, mert a* 23*-nak és a* 92*-nak van közös számjegye. Viszont a harmadikba egy sem kerül, mert a* $92 \cdot 4 = 368$*-nak nincs közös számjegye a* 92*-vel. Ebben az esetben tehát Arthur kettő aranyat szerez.*

4. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $BCD\sphericalangle = 150°$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E, továbbá a BC oldal felezőpontja F. Legyen az E-ből AB-re állított merőleges AB-vel vett metszéspontja G, az AB oldal felezőpontja pedig H.
a) Mekkora az EH szakasz hossza?
b) Mekkora az FG szakasz hossza?

5. Felírtunk a táblára három darab 1-es számot. Egy lépésben kiválasztunk két számot, majd az egyiket letöröljük, és helyére a két kiválasztott szám összegét vagy különbségét írjuk. Tehát ha az a és b számokat választottuk ki, akkor a-t vagy b-t letöröljük, a helyére pedig $a + b$ vagy $|a - b|$ kerül. Ilyen lépéseket végezve:
a) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám az 53, 2026, 2036 legyen?
b) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 0, 0, 0 legyen?
c) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 42, 91, 112 legyen?

6. Játék: A játékvezető szétoszt 3 mezőre összesen legfeljebb 20, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XIX. Dürer Verseny szervezői

XIX. Dürer Verseny

D

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős feladatsor**

---

1. Merlinnek van sok üres doboza egymás mellett. Arthur beletesz az első dobozba valahány kavicsot, majd megad egy 1-nél nagyobb k egész számot. Ezután Merlin a második dobozba annyi kavicsot tesz, amennyi az első dobozban lévő kavicsok számának k-szorosa. Merlin ezt ismételgetve minden dobozba az eggyel korábbi dobozban lévő kavicsok számának k-szorosát teszi. Ha a bekerülő kavicsok számának nem lenne közös számjegye az előző dobozban lévők számával, akkor azt már nem teszi bele és abbahagyja a kavicspakolgatást. Ha valamelyik dobozba 1000-nél több kavics kerülne, akkor azt már nem teszi bele és szintén abbahagyja. Végül Merlin annyi aranyat ad Arthurnak, ahány dobozban van kavics. Legfeljebb hány aranyat szerezhet Arthur?

Például, ha Arthur az első dobozba 23 *kavicsot tesz és a* 4*-es számot adja meg, akkor a második dobozba* 92 *darab kerül, mert a* 23*-nak és a* 92*-nak van közös számjegye. Viszont a harmadikba egy sem kerül, mert a* $92 \cdot 4 = 368$*-nak nincs közös számjegye a* 92*-vel. Ebben az esetben tehát Arthur kettő aranyat szerez.*

2. Felírtunk a táblára három darab 1-es számot. Egy lépésben kiválasztunk két számot, majd az egyiket letöröljük, és helyére a két kiválasztott szám összegét vagy különbségét írjuk. Tehát ha az a és b számokat választottuk ki, akkor a-t vagy b-t letöröljük, a helyére pedig $a + b$ vagy $|a - b|$ kerül. Ilyen lépéseket végezve:
a) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám az 53, 2026, 2036 legyen?
b) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 0, 0, 0 legyen?
c) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 42, 91, 112 legyen?

3. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege
a) pontosan 2,
b) pontosan 2028,
c) pontosan 2029.

4. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $BCD\sphericalangle = 150°$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E, továbbá a BC oldal felezőpontja F. Legyen az E-ből AB-re állított merőleges AB-vel vett metszéspontja G, az AB oldal felezőpontja pedig H.
a) Mekkora az EH szakasz hossza?
b) Mekkora az FG szakasz hossza?

5. Legyen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nemnegatív egész számok egy végtelen hosszú sorozata. Tudjuk, hogy $a_0 = 0$, és létezik olyan k, hogy $a_k \neq k$. Továbbá minden n, m nemnegatív egészre teljesül, hogy $|a_n - a_m|$ osztja $|n - m|$-et, vagy pedig $a_n = a_m$. Mi a lehető legnagyobb szám, ami szerepelhet egy ilyen sorozatban?
Ha minden M *egész számra létezik olyan sorozat, amelyben szerepel* M*-nél nagyobb szám, akkor a válasz végtelen.*

6. Játék: A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodszomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XIX. Dürer Verseny szervezői

XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős feladatsor**

---

1. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek minden $n > 1$ egész számra van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege pontosan n.

2. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $BCD\sphericalangle = 150°$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E, továbbá a BC oldal felezőpontja F. Legyen az E-ből AB-re állított merőleges talppontja G. Mekkora az FG szakasz hossza?

3. Gábor vendéglőjében csak kétféle ételt tudnak készíteni, főtt grifftojást és grillezett sárkányhúst. Sajnos a vendéglő konyhája kicsi, ezért minden nap pontosan az egyik ételből készítenek. Gábor úgy szeretné meghatározni jövőre az akciós napokat és az ételek sorrendjét, hogy az akciós napokon is felváltva legyen a két étel és a nem akciós napokon is. A beszállítónak az egzotikus alapanyagok miatt már most le kell adni az egész jövő évre, hogy melyik nap melyikből vigyenek majd a vendéglőbe. Hányféleképp tud Gábor rendelést leadni a beszállítónak, hogy megvalósíthassa a tervét jövőre, egy 365 napos évben?
Gábor vendéglője az év minden napján kinyit. Két megrendelést akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan nap, amelyre másféle alapanyagokat kér. A két ételt különböző alapanyagokból készítik.

4. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n-re az n pozitív osztóin felvett függvényértékek összege kettőhatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1)$, $f(2), \ldots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k.
A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Az n pozitív osztói közé beleértjük az 1-et és az n-et is. Azon számokat tekintjük kettőhatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

5. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácspontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d, ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácspontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácspontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnan is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácspontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.
Két megmaradt rácspont akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

6. Játék: A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodszomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XIX. Dürer Verseny szervezői

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős feladatsor**

---

1. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n-re $\sum_{d|n} f(d)$ kettőhatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1)$, $f(2), \ldots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k.
A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Azon számokat tekintjük kettőhatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

2. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácspontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d, ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácspontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácspontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnan is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácspontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.
Két megmaradt rácspont akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

3. Az ABC háromszög magasságpontja legyen H, a BC oldal felezőpontja M. Legyen D olyan pont a BC egyenesen, amelyre $DH \perp AM$, valamint M tükörképe B-re legyen E. Továbbá tegyük fel, hogy BE Thalész-körének és AHD köréírt körének létezik két metszéspontja, legyenek ezek X és Y. Bizonyítsátok be, hogy X, Y és M egy egyenesre esnek.

4. Egy gráf csúcsait megszámozzuk a következőképpen: minden csúcsra egy olyan pozitív egészet írunk, ami legfeljebb a csúcs fokszáma. Egy véges, egyszerű, összefüggő gráfot *szépnek* nevezünk, ha minden ilyen számozás mellett létezik a gráfban olyan séta, amelynek a kezdő- és végpontja tetszőleges, valamint minden csúcsban pontosan annyiszor jár, mint a csúcson lévő szám. Legkevesebb hány éle lehet egy $n > 1$ csúcsú szép gráfnak?
Egy gráfséta során a csúcsokat és az éleket többször is érinthetjük.

5. Legyen $P(x)$ egy olyan polinom, melynek minden együtthatója nemnegatív valós szám, továbbá $P(0) = 0$. Tegyük fel, hogy ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $P(-2025x) \geq -2025P(x)$. Legyenek $x_1, \ldots, x_{2026}$ olyan valós számok, melyek összege nemnegatív. Bizonyítsátok be, hogy ha minden x_i-re teljesül, hogy $-2025 \leq x_i \leq 1$, akkor

$$P\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2026}}{2026}\right) \leq \frac{P(x_1) + \ldots + P(x_{2026})}{2026}.$$

6. Játék: A játék kezdetén a játékvezető felír nyolc pozitív egész számot az első szintre, és megad egy k pozitív egész számot, ami nem nagyobb a nyolc szám összegénél. Egy lépésben a soron következő játékos letöröl két számot ugyanarról a szintről és az összegüket az eggyel nagyobb sorszámú szintre írja. Az a játékos nyer, aki először ír olyan számot, ami legalább k.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a nyolc szám és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XIX. Dürer Verseny szervezői

XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

C1. Aprajafalván futóversenyt rendeztek a törpök. A versenyen Törpilla, Törpliliom, Törpvirág, Dulifuli, Okoska és Ügyi vett részt. A verseny végén minden törp mondott egy állítást:

- Törpilla: Közvetlenül utánam Okoska vagy Ügyi érkezett be, valamint Dulifuli és köztem pontosan három törp végzett.
- Törpliliom: Törpvirág, Dulifuli és Okoska is előttem ért be.
- Törpvirág: 5. lettem.
- Dulifuli: Nem szeretek dobogón végezni és nem is kerültem oda.
- Okoska: Nem Dulifuli és nem Ügyi ért be közvetlenül utánam.
- Ügyi: 2. lettem és a dobogón Törpilla és Okoska szerepelt velem együtt.

Milyen sorrendben végzett a hat törp, ha pontosan az egyikük tévedett, a többiek igazat mondtak, valamint nem történt holtverseny?

1. megoldás:

Próbáljuk végig mind a hat esetet, aszerint hogy melyik törp tévedett.

1. eset: Törpilla tévedett, akkor mindenki más igazat mondott. Törpvirág 5., Törpliliom mögötte végzett (6.), Dulifuli nem dobogós, ezért 4. lett. Ügyi állításának második fele ekkor már teljesül, valamint ő a 2. helyezett. Azonban ha Okoska az 1., akkor Ügyi, ha Okoska a 3., akkor Dulifuli ért be közvetlenül utána, tehát Okoskának is tévednie kellett, ami ellentmondás.

2. eset: Törpliliom tévedett. Az előző gondolatmenethez hasonlóan: Törpvirág 5., Ügyi 2. és mivel Okoska dobogós, de nem lehet Ügyi mögötte, így Okoska a 3., Törpilla az 1. Mivel az állítása igaz, így Dulifuli 5., de ott Törpvirág végzett és nincsen holtverseny. Ismét ellentmondást kaptunk.

3. eset: Törpvirág tévedett. Így a 2. eset gondolatmenete szerint Törpilla 1., Ügyi 2., Okoska 3., Dulifuli 5. (ezzel az ő állítása teljesül is). Törpliliom és Törpvirág rendre 6. illetve 4., mert Törpliliomnak Törpvirág mögött kellett végeznie. Ekkor minden állítás teljesül, kivéve Törpvirágé, tehát ez egy jó megoldás.

4. eset: Dulifuli tévedett. Mivel Ügyi, Törpilla és Okoska is igazat mond, így Törpilla 1., Ügyi 2., Okoska 3. és Dulifuli 5., de akkor Törpvirág is tévedett, ami ellentmondás.

5. eset: Okoska tévedett. Ügyi és Törpilla igazat mondott, ezért Ügyi 2.. Törpilla nem lehet 3., mert akkor nem Ügyi vagy Okoska lenne mögötte, tehát ő az 1., és így Okoska csak 3. lehet Ügyi állítása miatt. Törpilla válasza miatt Dulifuli 5., de akkor Törpvirággal ütközik megint, ami nem lehet.

6. eset: Ügyi tévedett. Az 1. esethez hasonlóan Törpvirág 5., Törpliliom 6. (mert mögötte végzett), Dulifuli 4. (mert nem dobogós). De ekkor Törpilla és Dulifuli közt 3 törp végzett, tehát Törpilla 0. helyezett lenne, és az nem lehet.

Mind a hat esetet megvizsgáltuk és csak a 3. eset lehetséges. A jó sorrend: 1. Törpilla, 2. Ügyi, 3. Okoska, 4. Törpvirág, 5. Dulifuli, 6. Törpliliom.

2. megoldás:

Tegyük fel, hogy Törpilla, Ügyi és Törpvirág is igazat mondott. Ügyi állítása miatt ő a 2., Törpilla és Okoska pedig szintén dobogósok. Törpilla nem lehet 3., mert akkor nem Ügyi vagy Okoska végzett volna mögötte, így Törpilla nyert. Az állítása másik része miatt Dulifuli 5. lett, ez azonban ellentmond Törpvirág állításának. Tehát a három törp között kell lennie annak, aki tévedett. A másik három esetben az előző megoldáshoz hasonlóan járhatunk el.

C2. Adott 2026 négyzet egy sorban. Mutassátok meg, hogy akárhogyan írunk relációs jeleket ($<$, vagy $>$) a négyzetek közé, mindig ki lehet tölteni a négyzeteket az $1, 2, \ldots, 2026$ számokkal úgy, hogy minden négyzetbe egy szám kerüljön, minden számot egyszer használjunk és teljesüljenek a relációk!

Az ábrán látható egy példa öt négyzetre valamilyen relációs jelekkel, és egy helyes kitöltéssel az $1, 2, 3, 4, 5$ *számokkal.*

$$\boxed{4} > \boxed{2} > \boxed{1} < \boxed{5} > \boxed{3}$$

XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

---

1. megoldás: Induljunk a bal szélső négyzet felől és sorrendben írjunk mindig egy számot az éppen következő négyzetbe. Először nézzük meg, hogy az első relációs jel mit mutat: ha az első négyzet nagyobb, mint a második, akkor írjuk be az első négyzetbe a 2026-ot, ha viszont kisebb, akkor az 1-et. Így az előbbi esetben megmaradnak még a számok 1-től 2025-ig, a második esetben pedig 2-től 2026-ig. Innentől kezdve ezt a lépést ismételve haladunk a soron következő négyzetre: ha az adott négyzet nagyobb az őt követő négyzetnél, akkor a megmaradt számok közül a legnagyobbat írjuk bele, ha kisebb az őt követőnél, akkor pedig a megmaradt számok közül a legkisebbet. Ezzel a módszerrel ki tudjuk tölteni 1-től 2026-ig a számokkal a négyzeteket. Most még megmutatjuk, hogy ez a kitöltés tényleg megfelel a relációs jeleknek. Az első relációs jel teljesül biztosan, hiszen bármi is áll tőle jobbra, a 2026 nagyobb az összes többi számnál, a másik esetben pedig az 1 kisebb az összes többi számnál. Hasonlóan a második relációs jel is teljesül, mert ha a második négyzet kisebb a harmadiknál, akkor oda írtuk a megmaradt számok legkisebbjét, ha pedig nagyobb, akkor a legnagyobbját írtuk bele. Ehhez hasonló indoklás minden relációs jelre fog működni, hiszen minden pillanatban az éppen beírt szám az vagy nagyobb minden megmaradt számnál, vagy kisebb minden megmaradt számnál (attól függően hogy az előzőnél kisebb vagy nagyobb volt az aktuális szám). Vagyis tényleg minden pillanatban folytatható helyesen az eljárásunk, vagyis helyes kitöltést kapunk.

2. megoldás: Először töltsük ki a négyzeteket tetszőleges különböző valós számokkal, nem figyelve arra, hogy egészek legyenek. A bal szélső négyzetbe írjuk be az 1-et, majd az ezt követő reláció alapján írjunk a második négyzetbe egy ennél kisebb vagy nagyobb valós számot. Ezután a második relációs jel alapján írunk a harmadik négyzetbe egy újabb számot, csupán arra figyelve, hogy a relációs jel stimmeljen és ne egy korábban használt számot írjunk be. Ezt megtehetjük, mert bármely két valós szám között végtelen sok valós szám van, ezek közül tetszőlegesen tudunk választani egy megfelelőt. Miután kitöltöttük a 2026 négyzetet, a relációs jelek mind teljesülnek. Végül minden négyzetbe írjuk bele, hogy az odaírt valós szám a használt 2026 valós szám közül hányadik legkisebb. Mivel különbözőek a beírt számok, ezért így 1-től 2026-ig írjuk be a számokat a sorrendjük szerint. Továbbá a relációk is mind teljesülnek, hiszen a valós számokra teljesültek és a számok egymáshoz viszonyított sorrendje a két esetben azonos. Ezzel megadtunk egy kitöltést, akárhogyan is írtuk a relációs jeleket.

3. megoldás: Bizonyítsunk teljes indukcióval tetszőleges számú négyzet esetére! Ha csak egy négyzet lenne, akkor ebbe beírjuk az 1-est és készen vagyunk, mivel nincsen egy relációs jel sem. Ha kettő négyzet van a sorban, akkor a köztük lévő relációs jelnek megfelelően be tudjuk írni az 1-et és a 2-t úgy, hogy az teljesüljön. Most tegyük fel, hogy k darab négyzet esetén már beláttuk az állítást, azaz ekkor be tudjuk írni az $1, 2, ..., k$ számokat megfelelően k egymás melletti négyzetbe. Most megmutatjuk, hogy ekkor $k+1$ négyzet esetén is ki tudjuk tölteni a négyzeteket. Ha az első négyzet nagyobb, mint a második, akkor beleírjuk $k+1$-et az első négyzetbe. Ekkor a maradék k darab négyzetbe az $1, 2, ..., k$ számokat kell beírnunk, amit megtehetünk a feltevésünk szerint a relációs jelek teljesülésével. Ha pedig az első négyzet kisebb, mint a második, akkor beleírjuk az 1-et az első négyzetbe. Így a maradék k darab négyzetbe a $2, 3, ..., k, k+1$ számokat kell beírnunk, amit szintén megtehetünk a feltevésünk szerint a relációs jelek teljesülésével, hiszen beírjuk az $1, 2, ..., k-1, k$ számokat megfelelően és mindegyikhez hozzáadunk 1-et. Ezzel beláttuk az állítást teljes indukcióval: 2026 négyzet is kitölthető a relációs jeleknek megfelelően. *(Megjegyzés: ez a megoldás ugyanazt a kitöltést adja, mint az első.)*

C3. Merlinnek van sok üres doboza egymás mellett. Arthur beletesz az első dobozba valahány kavicsot, majd megad egy 1-nél nagyobb k egész számot. Ezután Merlin a második dobozba annyi kavicsot tesz, amennyi az első dobozban lévő kavicsok számának k-szorosa. Merlin ezt ismételgetve minden dobozba az eggyel korábbi dobozban lévő kavicsok számának k-szorosát teszi. Ha a bekerülő kavicsok számának nem lenne közös számjegye az előző dobozban lévők számával, akkor azt már nem teszi bele és abbahagyja a kavicspakolgatást. Ha valamelyik dobozba 1000-nél több kavics kerülne, akkor

XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

azt már nem teszi bele és szintén abbahagyja. Végül Merlin annyi aranyat ad Arthurnak, ahány dobozban van kavics. Legfeljebb hány aranyat szerezhet Arthur?

Például, ha Arthur az első dobozba 23 *kavicsot tesz és a* 4*-es számot adja meg, akkor a második dobozba* 92 *darab kerül, mert a* 23*-nak és a* 92*-nak van közös számjegye. Viszont a harmadikba egy sem kerül, mert a $92 \cdot 4 = 368$*-nak nincs közös számjegye a* 92*-vel. Ebben az esetben tehát Arthur kettő aranyat szerez.*

1. megoldás: Arthur legfeljebb 7 aranyat szerezhet. Erre egy jó példa, ha az első dobozba 10 aranyat tesz, és k értékét 2-nek választja. Ekkor a dobozokba rendre 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 kerül, a nyolcadikba pedig meg már a $2 \cdot 640 = 1280 > 1000$ nem kerül be.

Bebizonyítjuk, hogy 7-nél több aranyat nem tud szerezni. Tegyük fel, hogy mégis tud, és még a nyolcadik dobozba is kerül kavics. Jelölje a az első dobozba rakott kavicsok számát. Ekkor a nyolcadik dobozba ak^7 kavics kerül, amiről tudjuk, hogy legfeljebb 1000. Ekkor az nem lehetséges, hogy $k > 2$, mert ekkor $ak^7 \geq 3^7 > 1000$ lenne. Így $k = 2$, és a nyolcadik dobozba $128a$ kavics került. Itt $128a \leq 1000$, így $a \leq 7$. Viszont bármely pozitív egyjegyű számot 2-vel megszorozva olyan számot kapunk, ami nem rendelkezik közös jeggyel az eredeti egyjegyű számmal, így már a második dobozba sem kerülnének kavicsok, ez ellentmondás. Így a bizonyítással készen vagyunk, valóban 7 arany a maximum.

2. megoldás: Vezessünk be egy p ismeretlent, ami az Arthur által az első dobozba rakott kavicsok számát jelölje. Tudjuk, hogy Arthur által megadott k egész számra a következő feltétel teljesül: $k \geq 2$. Jelöljük el Merlin dobozainak számát n-nel, ekkor Merlin utolsó dobozában a kavicsok száma: $p \cdot k^{n-1}$. Erre a feladat szövege szerint a következő feltételnek kell teljesülnie: $p \cdot k^{n-1} \leq 1000$. p minimális értéke esetén ($p = 1$) vizsgájuk meg kis k értékekre milyen határfeltételt szab meg az összefüggésünk n értékére: Ha $k = 2 \to n \leq 10$, ha $k = 3 \to n \leq 7$, ha $k = 4 \to n \leq 5$. Megfigyelhető, hogy k értékének növelésével n feltétele csökken. Mivel azt szeretnénk elérni, hogy minél több doboza legyen Merlinnek, ezért vizsgáljuk meg, hogy tudunk-e $k = 2$ esetén legalább 7 dobozba kavicsot helyezni. Ahhoz, hogy az egymást követő dobozokban lévő kavicsok számának legyen közös számjegye, a legegyszerűbb, ha az első dobozban a kavicsok száma 0-ra végződik, így az összes többi dobozban is a kavicsok számának utolsó számjegye 0 lesz. Mivel azt szeretnénk, hogy minél több dobozba kerüljön kavics, így optimális esetben 10 kavicsot rak Arthur az első dobozba. Ekkor 7 dobozba kerülhet kavics (utolsó dobozba 640 kavics kerül), ahhoz hogy egyik dobozban lévő kavicsok száma se haladja meg az 1000-t. Tudtunk 7 dobozra konstrukciót mutatni, így $k > 2$-vel már nem kell foglalkozni. Kérdés már csak az, hogy lehet-e 8 dobozba kavicsokat rakni. Ehhez az kell, hogy az első dobozba helyezett kavicsok számát csökkentsük. Ekkor egyjegyű lesz az első dobozba helyezett kavicsok száma, azonban nincs olyan egyjegyű szám, amelynek lenne azonos jegye a kétszeresével a 0 kivételével, de 0 kavicsot nem helyezhetek az első dobozba. Tehát Arthur legfeljebb 7 aranyat szerezhet.

C4. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $BCD\sphericalangle = 150°$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E, továbbá a BC oldal felezőpontja F. Legyen az E-ből AB-re állított merőleges AB-vel vett metszéspontja G, az AB oldal felezőpontja pedig H.
a) Mekkora az EH szakasz hossza?
b) Mekkora az FG szakasz hossza?

Megoldás: Mivel E az átlók metszéspontja, ezért E felezi az AC szakaszt. Tudjuk továbbá, hogy F felezi BC-t, így EF középvonal ABC-ben. Tudjuk továbbá, hogy EG merőleges AB-re, ezért EF-re is. Vagyis EGF egy derékszögű háromszög, amelyben az E-nél van a derékszög. A feladat (b) része, hogy mekkora a GF szakasz hossza. Ezt Pitagorasz-tétel segítségével fogjuk kiszámolni, amihez először az EF, majd az EG befogó hosszát számoljuk ki. Az utóbbihoz az EH szakasz hosszát is kiszámoljuk, ami a feladat (a) kérdése.

Láttuk már, hogy EF középvonal ABC-ben, vagyis $\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2}$. Viszont AB a rombusz egy oldala, vagyis $AB = 1$, amiből azt kapjuk, hogy $EF = \frac{1}{2}$.

Ezután rátérünk EG kiszámolására, amihez először az EH szakasz hosszát számoljuk ki.

XIX. Dürer Verseny

C

kategória

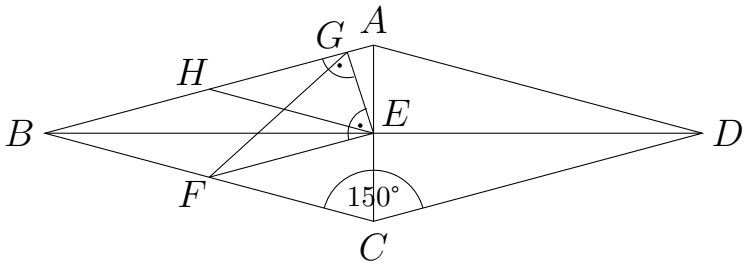
Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

---

a) Mivel $ABCD$ egy rombusz, ezért az átlói merőlegesek egymásra, vagyis $AED\sphericalangle = 90°$. Ebből következik, hogy E rajta van AB Thalész-körén, vagyis $HE = HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$. Ezzel a feladat első részével meg is vagyunk.

b) Ezután folytassuk a megoldást, EG kiszámolásával. Tudjuk, hogy $BCD\sphericalangle = 150°$, amiből következik, hogy $ABC\sphericalangle = HBC\sphericalangle = 30°$. Viszont azt is tudjuk, hogy egy rombuszban az átló felezi a csúcsnál lévő szöget, ami esetünkben azt jelenti, hogy az EB egyenes felezi az ABC szöget. Vagyis $ABE\sphericalangle = HBE\sphericalangle = 15°$. Láttuk viszont már, hogy $HB = HE$, vagyis BEH egy egyenlőszárú háromszög, amiből $BEH\sphericalangle = 15°$. Ebből ki tudjuk számolni a $GHE\sphericalangle$ nagyságát, hiszen ez a BEH háromszög H-beli külső szöge, így $GHE\sphericalangle = HBE\sphericalangle + BEH\sphericalangle = 15° + 15° = 30°$. Tudjuk továbbá, hogy EG merőleges AB-re, azaz $EGH\angle = 90°$, ami azt jelenti, hogy EGH egy szabályos háromszög fele (úgynevezett *félszabályos* háromszög), vagyis $EG = \frac{HE}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

Végül csak az maradt hátra, hogy a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk az EGF háromszögre: $EG^2 + EF^2 = FG^2$, amibe behelyettesítve $FG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ hobbitláb.



C5. Felírtunk a táblára három darab 1-es számot. Egy lépésben kiválasztunk két számot, majd az egyiket letöröljük, és helyére a két kiválasztott szám összegét vagy különbségét írjuk. Tehát ha az a és b számokat választottuk ki, akkor a-t vagy b-t letöröljük, a helyére pedig $a + b$ vagy $|a - b|$ kerül. Ilyen lépéseket végezve:
a) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám az 53, 2026, 2036 legyen?
b) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 0, 0, 0 legyen?
c) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 42, 91, 112 legyen?

Megoldás: A megengedett lépések így is megfogalmazhatók:

- amikor a és b helyére $a + b$ és b kerül, akkor a-hoz *hozzáadtuk* b-t,
- amikor a és b helyére $|a - b|$ és b kerül, akkor a-ból *kivontuk* b-t (melyet a feladat szövege szerint úgy kell érteni, hogy ha negatív lesz az eredmény, akkor annak az abszolútértékét vesszük).

Vegyük észre, hogy amíg van a táblán legalább egy darab 1-es, addig a másik két számhoz akárhányszor hozzáadhatunk 1-et. Így a kezdőállapotból indulva és egy 1-est megtartva a másik két szám értékét tetszőleges természetes számokra beállíthatjuk.

a) Igen, elérhető. Megadunk egy lehetséges lépéssorozatot:

- A fent említett módszerrel először elérjük, hogy a táblán az 1, 3, 2026 számok szerepeljenek.
- Az 1-eshez hozzáadjuk 3-szor a 3-ast, így az 1-es helyett 10-est kapunk.
- A 3-ashoz hozzáadjuk 5-ször a 10-est, így a 3-as helyett 53-ast kapunk.
- Végül a 10-hez hozzáadjuk a 2026-ot, így megkapjuk a 2036-ot.

Ezzel tehát megkaptuk a kívánt három számot a táblán.

b) Nem lehetséges. Gondolkodjunk visszafelé. Egy lépésben a táblán lévő számok közül maximum egy darab változhat meg. Tehát, ahhoz, hogy mindhárom szám 0 legyen, az utolsó lépés előtt vagy három 0-nak kellett lennie a táblán, vagy két 0-nak és egy 0-tól különböző számnak.

- Abban az esetben, ha a táblán három 0 volt az utolsó lépés előtt, akkor az utolsó lépésben semmi sem történt a számokkal, így haladjunk egy újabb lépést visszafelé, a gondolatmenetet megismételve.
- Abban az esetben, ha két 0 és egy 0-tól különböző szám volt a táblán az utolsó lépés előtt, akkor ezekből egy lépéssel kellett elérnünk a csupa 0 helyzetet. Ehhez a 0-tól különböző számnak a műveletben részt vevő két szám között kellett lennie. A másik szám egy 0 volt, azonban egy nemnulla számhoz 0-t hozzáadva vagy kivonva a szám nem változik meg, ez ellentmondás.

Így az valóban nem érhető el a kezdőállapotból, hogy három 0 legyen a táblán.

c) Vegyük észre, hogy a 42, a 91 és a 112 mind oszthatók 7-tel, a kiinduló állapotban viszont egyik szám sem. Itt is gondolkodjunk visszafelé. Ahhoz, hogy három 7-tel osztható számot kapjunk, az utolsó lépés előtt vagy szintén három darab 7-tel osztható számunk volt, vagy pedig két 7-tel osztható és egy 7-tel nem osztható.

- Abban az esetben, ha a táblán három 7-tel osztható szám volt az utolsó lépés előtt, akkor ugyanabban a szituációban vagyunk, mint a folyamat végén, és a kezdőállapotot nem értük el (mert abban 7-tel nem osztható számok vannak). Haladjunk egy újabb lépést visszafelé, a gondolatmenetet megismételve.
- Abban az esetben, ha két 7-tel osztható szám és egy 7-tel nem osztható szám volt a táblán az utolsó lépés előtt, akkor ezekből egy lépéssel el kellett tudnunk érni a csupa 7-tel osztható helyzetet. Ehhez a 7-tel nem osztható számnak a műveletben részt vevő két szám között kellett lennie, a másik szám pedig egy 7-tel osztható volt. Ám egy 7-tel nem osztható számhoz hozzáadva vagy abból kivonva egy 7-tel osztható számot, a kapott szám 7-tel továbbra sem lesz osztható, ez ellentmondás.

Így valóban nem lehet elérni a kezdőállapotból azt sem, hogy a táblán lévő három szám a 42, 91 és 112 legyen.

Érdekesség: Az euklideszi algoritmus használatával bármilyen olyan számhármas elérhető a megadott lépésekkel, melyben a három szám legnagyobb közös osztója megegyezik a kiinduló három szám legnagyobb közös osztójával.

C6. **Játék:** A játékvezető szétoszt 3 mezőre összesen legfeljebb 20, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Vegyük észre, hogy minden lépés után páros sok korong marad a pályán. Ezért a mezőkön lévő korongok számának paritása kétféle lehet:

(a) vagy minden mezőn páros számú korong van,

(b) vagy egy mezőn páros és két mezőn páratlan számú korong van.

XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

Azt állítjuk, hogy a soron következő játékos akkor tud nyerni, ha éppen (b) típusú állapotban vagyunk. Ugyanis ekkor a két páratlan mezőről egy-egy korongot elvéve mindhárom mezőn páros sok korong marad, így az (a) típusú állapotba kerülünk. Ekkor az ellenfelünk vagy veszített (mert minden korong elfogyott a pályáról, vagy csak egy kupacban maradt korong és a másik kettő elfogyott), vagy pedig két mezőről egy-egy korongot elvéve, egy páros és két páratlan mezőt hagy nekünk, így újra visszakapunk egy (b) típusú állapotot.

Így ha a kezdőállás (a) típusú, akkor másodikként, ha (b) típusú, akkor pedig kezdőként érdemes játszanunk, és minden lépésben (a) típusú – azaz csupa páros – állapotot hagyunk az ellenfélnek.

XIX. Dürer Verseny

D

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

D1. Merlinnek van sok üres doboza egymás mellett. Arthur beletesz az első dobozba valahány kavicsot, majd megad egy 1-nél nagyobb k egész számot. Ezután Merlin a második dobozba annyi kavicsot tesz, amennyi az első dobozban lévő kavicsok számának k-szorosa. Merlin ezt ismételgetve minden dobozba az eggyel korábbi dobozban lévő kavicsok számának k-szorosát teszi. Ha a bekerülő kavicsok számának nem lenne közös számjegye az előző dobozban lévők számával, akkor azt már nem teszi bele és abbahagyja a kavicspakolgatást. Ha valamelyik dobozba 1000-nél több kavics kerülne, akkor azt már nem teszi bele és szintén abbahagyja. Végül Merlin annyi aranyat ad Arthurnak, ahány dobozban van kavics. Legfeljebb hány aranyat szerezhet Arthur?

Például, ha Arthur az első dobozba 23 *kavicsot tesz és a* 4*-es számot adja meg, akkor a második dobozba* 92 *darab kerül, mert a* 23*-nak és a* 92*-nak van közös számjegye. Viszont a harmadikba egy sem kerül, mert a* $92 \cdot 4 = 368$*-nak nincs közös számjegye a* 92*-vel. Ebben az esetben tehát Arthur kettő aranyat szerez.*

Megoldás: Lásd a C3 feladat megoldását.

D2. Felírtunk a táblára három darab 1-es számot. Egy lépésben kiválasztunk két számot, majd az egyiket letöröljük, és helyére a két kiválasztott szám összegét vagy különbségét írjuk. Tehát ha az a és b számokat választottuk ki, akkor a-t vagy b-t letöröljük, a helyére pedig $a + b$ vagy $|a - b|$ kerül. Ilyen lépéseket végezve:
a) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám az 53, 2026, 2036 legyen?
b) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 0, 0, 0 legyen?
c) Elérhető-e, hogy a táblán a három szám a 42, 91, 112 legyen?

Megoldás: Lásd a C5 feladat megoldását.

D3. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege
a) pontosan 2,
b) pontosan 2028,
c) pontosan 2029.

Megoldás:

1. megoldás:

a) Olyan számot, aminek a számjegyeinek összege 2, úgy kaphatunk, ha összeadunk az 1, 10, 100, 1000, ... számok közül kettőt. Az 1 héttel osztva 1 maradékot ad, a 10 héttel osztva három maradékot ad. Írásbeli osztással kiszámolható, hogy $100 = 14 \times 7 + 2$ és $1000 = 142 \times 7 + 6$, azaz a 100 kettő, az 1000 pedig hat maradékot ad héttel osztva. Így $1000 + 1$ osztható lesz héttel és ennek számjegyösszege 2. Valóban, $1001 : 7 = 143$.

b) Ha egy héttel osztható számot megszorzunk egy pozitív egésszel, akkor továbbra is héttel osztható marad, illetve héttel osztható számok összege is héttel osztható. Így például héttel osztható $10010000 = 1001 \times 1000$ és emiatt $10010000 + 1001 = 10011001$ is az. Folytatva a gondolatmenetet, ha egymás mögé írjuk a héttel osztható 1001-et 1014-szer, akkor is héttel osztható számot kapunk, aminek a számjegyösszege 2028 lesz, hiszen ennyi 1-es jegye van. (Hasonlóan elérhető tetszőleges páros számjegyösszegű héttel osztható szám ezzel a módszerrel.)

c) Az előző rész mintájára tudunk készíteni olyan héttel osztható számot, amiben a számjegyek összege 2026, mégpedig 1013 darab egymás után írt 1001-es segítségével. Adjunk ehhez a számhoz 21-et, ami szintén osztható héttel. A kapott héttel osztható szám így 10011001 helyett 10011022-re végződik, így 3-mal nőtt a számjegyek összege. A kapott szám egy héttel osztható, 2029 számjegyösszegű szám. (Hasonlóan elérhető tetszőleges egynél nagyobb páratlan számjegyösszegű héttel osztható szám.)

2. megoldás:

Minden $n > 1$ egész számhoz mutatunk egy ilyen többszöröst az alábbi módon: ha n-et 7-tel maradékosan osztjuk, akkor megkapjuk egy felírását $n = a \cdot 7 + b$ alakban, ahol a, b természetes számok. Először $n \leq 8$ esetén keresünk megfelelő számokat, az alábbiak például megfelelőek:

- $n = 2$-re az 1001,
- $n = 3$-ra a 21,
- $n = 4$-re a 112,

- $n = 5$-re a 14,
- $n = 6$-ra a 42,
- $n = 7$-re a 7,
- $n = 8$-ra a 35.

Általános esetben pedig egy $a+4$-jegyű számot adunk meg, amelynek $b > 1$ esetén első a, egyébként első $a-1$ jegye 7-es, az utolsó négy jegy pedig a megfelelő hetes maradékhoz tartozó szám a fenti hét esetből, esetlegesen az elején 0-kkal kiegészítve, ha nem szükséges mind a négy számjegy használata. Például $n = 18 = 2 \cdot 7 + 4$ esetén a megadott számunk a 770112, hiszen $n = 4$-re 112 a számunk, ezt két 7-essel kell kiegészítenünk és egy 0-val, mivel a 112 csupán háromjegyű. Az így kapott számnak épp n lesz a számjegyeinek összege, és 7-tel is osztható, hiszen az utolsó 4 jegy egy 7-tel osztható számot alkot, és ehhez csak $700\ldots0$ alakú, szintén 7-tel osztható számokat kell hozzáadnunk, hogy a teljes számot megkapjuk. Ezzel a módszerrel tehát tetszőleges számjegyösszegre meg tudunk adni megfelelő héttel osztható számot. (2 számjegyösszegre az 1001, 2028 számjegyösszegre $77\ldots70014$ és 2029 számjegyösszegre $77\ldots70042$ lesz a példa.)

D4. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $BCD\sphericalangle = 150^\circ$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E, továbbá a BC oldal felezőpontja F. Legyen az E-ből AB-re állított merőleges AB-vel vett metszéspontja G, az AB oldal felezőpontja pedig H.
a) Mekkora az EH szakasz hossza?
b) Mekkora az FG szakasz hossza?

Megoldás: Lásd a C4 feladat megoldását.

D5. Legyen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nemnegatív egész számok egy végtelen hosszú sorozata. Tudjuk, hogy $a_0 = 0$, és létezik olyan k, hogy $a_k \neq k$. Továbbá minden n, m nemnegatív egészre teljesül, hogy $|a_n - a_m|$ osztja $|n-m|$-et, vagy pedig $a_n = a_m$. Mi a lehető legnagyobb szám, ami szerepelhet egy ilyen sorozatban?
Ha minden M egész számra létezik olyan sorozat, amelyben szerepel M-nél nagyobb szám, akkor a válasz végtelen.

Megoldás:

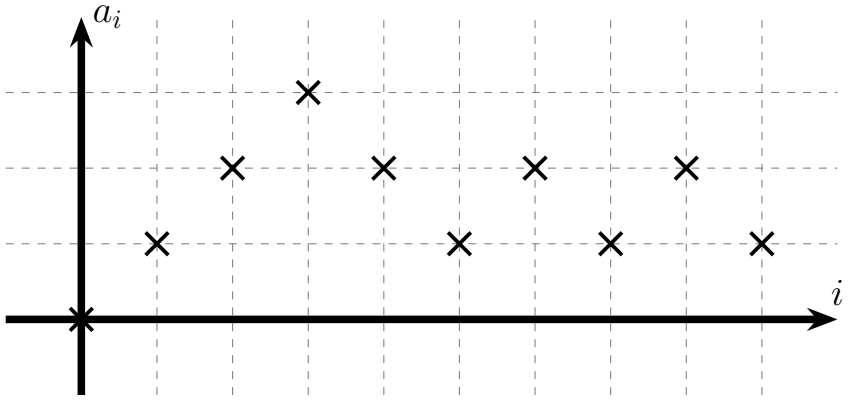
Megmutatjuk, hogy 3-nál nagyobb szám nem szerepelhet egy ilyen sorozatban. Jelölje a és b pozitív számokra $a \Big| b$ azt, hogy a osztja b-t. Először vegyük észre, hogy az $|a_n - a_m| \Big| |n-m|$ feltételből $|n-m| = 1$ esetén következik, hogy $a_{n+1} = a_n + 1$ vagy $a_{n+1} = a_n - 1$, illetve $a_n = a_m$ esetén lehet $a_{n+1} = a_n$, azaz a sorozat egy tagja az előző tagtól mindig legfeljebb 1-gyel tér el. Ha minden n-re $a_{n+1} = a_n + 1$ teljesülne, akkor $a_0 = 0$ miatt minden n-re $a_n = n$ lenne, amit a feladat nem enged meg, így biztosan lesz egy olyan i, amire $a_{i+1} = a_i$ vagy $a_{i+1} = a_i - 1$. Belátjuk, hogy bármelyik eset teljesül, a sorozat legnagyobb tagja nem lehet 3-nál nagyobb.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $a_{i+1} = a_i$, legyen ez az érték x. Megmutatjuk, hogy ekkor a sorozat minden tagja az $[x-1, x+1]$ intervallum egy egész pontja. Legyen $a_j = y$ a sorozat egy tetszőleges tagja, ahol $j \geq i+2$. Ha $y = x$, akkor valóban az intervallumból való. Tegyük fel, hogy $y \neq x$. Ekkor abból, hogy $|a_j - a_i|$ osztja $|j-i|$-t, megkapjuk, hogy $|y-x| \Big| j-i$. Hasonlóan $|a_j - a_{i+1}|$ osztja $|j-(i+1)|$-t, azaz $|y-x| \Big| j-i-1$. Persze ha egy szám oszt két számot, akkor a különbségüket is, így megkapjuk, hogy $|y-x| \Big| |j-i-(j-i-1)| = 1$, azaz $|y-x|$ osztja 1-et, ami csak úgy lehet, hogy $y-x = 1$ vagy $y-x = -1$, emiatt $x-1 \leq y \leq x+1$, vagyis $a_i - 1 \leq a_j \leq a_i + 1$ minden $j \geq i+2$ esetén. Hasonlóan belátható, hogy $j \leq i-1$ esetén is fennáll ugyanez az egyenlőtlenség. Ebből persze következik, hogy a sorozat minden tagja az $[x-1, x+1]$ intervallum egy egész pontja, és ezek között szerepel a 0, így ebben az esetben nem szerepelhet 2-nél nagyobb szám.

Most nézzük meg azt az esetet, amikor van olyan i, amire $a_{i+1} = a_i - 1$. Tekintsük a legkisebb ilyen i-t. Tudjuk, hogy $i \neq 0$, hiszen különben a_1 negatív lenne. Itt feltehetjük, hogy $a_{k+1} = a_k$ nem teljesül

semmilyen k-ra, különben alkalmazhatjuk az előző esetet. Vegyük észre, hogy mivel a_i az első olyan index, amire $a_{i+1} \neq a_i + 1$, ezért $a_{i-1} + 1 = a_i$, így $a_{i+1} = a_{i-1}$. Legyen a_j a sorozat egy tagja, ahol $j \geq i + 2$. Legyen $a_{i-1} = a_{i+1} = x$ és $a_j = y$, és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor $|a_j - a_{i-1}| \Big| j - (i-1)$, azaz $|y - x| \Big| j - i + 1$. Hasonlóan $|a_j - a_{i+1}| \Big| j - (i+1)$, azaz $|y - x| \Big| j - i - 1$. Ebből az előző esethez hasonlóan $|y - x| \Big| 2$, ezért $|y - x| \geq 2$, azaz $x - 2 \geq a_j \geq x + 2$ minden $j \geq i + 2$-ra, és hasonlóan belátható, hogy ugyanez teljesül minden $j \leq i - 2$-re is. Ebből azt kapjuk, hogy a sorozat minden tagja az $[x - 2, x + 2]$ intervallumban van, és ebben a 0-nak is szerepelnie kell, így minden tag legfeljebb 4. Ez még nem elég, hiszen azt szeretnénk megmutatni, hogy 3-nál nagyobb tag nem lehet. Tegyük fel indirekten, hogy létezik egy ilyen sorozat, amiben valamilyen i-re $a_i = 4$. Ekkor $a_{i-1} = a_{i+1} = 3$, mert egyik sem lehet 4-nél nagyobb, és feltettük, hogy semelyik két szomszédos tag nem egyenlő. Ekkor $|a_{i-1} - a_0| \Big| i - 1$ és $|a_{i+1} - a_0| \Big| i + 1$, ezért $3 \Big| 2$, ami persze nem teljesül, ezért az indirekt feltevésünk helytelen volt, azaz nem lehet 3-nál nagyobb tag a sorozatban.

Már csak mutatnunk kell egy olyan sorozatot, aminek a legnagyobb tagja 3. Legyen a sorozatunk a következő: $a_i = i$ legyen $i = 0, \ldots, 3$ esetén. Ezt követően legyenek a sorozat tagjai felváltva 2 és 3, azaz ha $j > 3$, akkor $a_j = 2$, ha j páros és $a_j = 1$, ha j páratlan. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat kielégíti a feladat feltételeit. Nyilván $k > 3$ esetén $a_k \neq k$. Még meg kell vizsgálnunk, hogy ha $a_i \neq a_j$, akkor $|a_i - a_j| \Big| |i - j|$. Ezt $|a_i - a_j| = 1$ esetén nyilván teljesül. Az az eset, amikor $|a_i - a_j| = 2$ csak akkor fordulhat elő, ha az egyik 0 vagy ha az egyik 3, amik csak egy-egy tagban vétetnek fel, ezekben az esetekben pedig látható, hogy az indexek paritása épp megfelelő. Az $|a_i - a_j| = 3$ eset csak úgy lehet, hogy a két szám a 0 és a 3, amik mindketten egy tagban vétetnek fel, és ezek indexének különbsége pont 3. Az alábbi ábrán látható a sorozat koordinátarendszerben ábrázolva.



D6. **Játék:** A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodszomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Vegyük észre, hogy bármelyik két különböző mezőről tudunk elvenni korongot, kivéve két szemköztiből. Tehát a játéknak csak úgy lehet vége, ha egyáltalán nem marad korong a pályán, vagy ha csak két szemközti mezőn marad korong. Valamint figyeljük meg azt is, hogy minden lépés után páros sok korong marad.

Nevezzük *nyerő*, illetve *vesztő* állapotnak azokat, amelyekből a soron következő játékos nyerni tud, illetve nem tud nyerni.

XIX. Dürer Verseny

D

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

Állítás: Egy állapot akkor és csak akkor vesztő, ha bármelyik két szemközti mezőt vesszük is, azokon összesen páros sok korong van.

Ez könnyen láthatóan teljesül a végállapotokra (hiszen mint minden állapotban, azokban is páros sok korong van). Minden lépésben a szemközti mezőpárok három összege közül kettőt csökkentünk eggyel-eggyel. Ha a fenti állítás szerinti vesztő állapotban vagyunk, akkor bármit is lépünk, egy mezőpáron páros lesz az összeg, míg a másik két mezőpáron páratlan, így a kapott állásra viszont már nem lesz igaz az állítás, onnan az ellenfelünk nyerni tud. Ha viszont nyerő állapotban vagyunk, akkor – mivel az összes korong darabszáma páros, és nem mindhárom összeg páros – az egyik összeg páros lesz, a másik kettő páratlan. Ekkor a két páratlan összegű mezőpárnak válasszuk ki egy-egy olyan mezőjét, amin van korong, és ezekről vegyünk el egy-egy korongot. Ez megtehető, hiszen a két kiválasztott mező különböző mezőpárhoz tartozik, tehát nem lehetnek szemköztiek. Ezzel az ellenfélnek olyan állapotot hagyunk, melyben mindhárom összeg páros, és így az állításunk szerint ez vesztő állapot.

Így a fenti állítás alapján a kezdőállásnál el tudjuk dönteni, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnénk-e bújni, és a stratégiánk az, hogy minden lépésben mindhárom összeget párosra állítjuk.

XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

E1. Bizonyítsátok be, hogy a 7-nek minden $n > 1$ egész számra van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege pontosan n.

Megoldás:

Az $1001 = 7 \times 143$ egy héttel osztható szám, ami számjegyeinek összege kettő. Ha egy héttel osztható számot megszorzunk egy pozitív egésszel, akkor továbbra is héttel osztható marad, illetve héttel osztható számok összege is héttel osztható. Így például héttel osztható $10010000 = 1001 \times 1000$ és emiatt $10010000 + 1001 = 10011001$ is az. Így ha egymás mögé írjuk az 1001-et valahányszor, akkor is héttel osztható számot kapunk. Ezzel minden páros számra találunk olyan héttel osztható számot, aminek annyi a számjegyösszege. A 21 héttel osztható, számjegyösszege három. Ha az előbb megtalált páros számjegyösszegű számokhoz 21-et adunk, ami szintén osztható héttel, akkor a kapott héttel osztható szám 1001 helyett 1022-re végződik, így 3-mal nőtt a számjegyek összege. Ezzel minden háromnál nagyobb páratlan számra is találtunk megfelelő héttel osztható számot, azaz beláttuk a feladat állítását.

E2. Az $ABCD$ rombuszban az oldalak hossza 1 hobbitláb, illetve $BCD\sphericalangle = 150°$. Legyen az AC és BD átlók metszéspontja E, továbbá a BC oldal felezőpontja F. Legyen az E-ből AB-re állított merőleges talppontja G. Mekkora az FG szakasz hossza?

Megoldás: Lásd a C4 feladat megoldását.

E3. Gábor vendéglőjében csak kétféle ételt tudnak készíteni, főtt grifftojást és grillezett sárkányhúst. Sajnos a vendéglő konyhája kicsi, ezért minden nap pontosan az egyik ételből készítenek. Gábor úgy szeretné meghatározni jövőre az akciós napokat és az ételek sorrendjét, hogy az akciós napokon is felváltva legyen a két étel és a nem akciós napokon is. A beszállítónak az egzotikus alapanyagok miatt már most le kell adni az egész jövő évre, hogy melyik nap melyikből vigyenek majd a vendéglőbe. Hányféleképp tud Gábor rendelést leadni a beszállítónak, hogy megvalósíthassa a tervét jövőre, egy 365 napos évben?
Gábor vendéglője az év minden napján kinyit. Két megrendelést akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan nap, amelyre másféle alapanyagokat kér. A két ételt különböző alapanyagokból készítik.

Megoldás: Nevezzük *blokkoknak* az olyan, egymás utáni napokból álló sorozatokat, melyeken ugyanaz az étel készül.

Először is vegyük észre, hogy nem lehet olyan blokk, ami 3 vagy annál több napból áll. Ekkor ugyanis a skatulyaelv miatt ezen napok között lenne legalább két akciós nap vagy legalább két nem akciós nap ugyanazzal az étellel, így valamelyik típusú napon sérülne az ételek váltakozása.

Tehát minden blokk egy- vagy kétnapos (a továbbiakban röviden: 1-es vagy 2-es). Vegyük észre azt is, hogy két 2-es blokk között mindig páros sok 1-es blokknak kell lennie (beleértve természetesen azt az esetet is, amikor nincs 1-es blokk köztük, azaz a két 2-es blokk közvetlenül egymás melletti). Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy az x-edik és $x+1$-edik napok, illetve az y-odik és $y+1$-edik napok alkotnak 2-es blokkot, ahol $y > x+1$, és a két blokk közötti napok ($x+2.$, $x+3.$, ..., $y-1.$) pedig 1-es blokkok, melyekből páratlan sok van. Ekkor a két 2-es blokk közt páros sok ételváltás van, azaz az $x.$, $x+1.$, $y.$ és $y+1.$ napokon ugyanaz az étel készül (mondjuk grifftojás). Világos, hogy az $x.$ és $x+1.$ napok közül is pontosan az egyik akciós, és az $y.$ és $y+1.$ napok közül is. Azonban az akciós napokon felváltva kell lennie az ételeknek, így az $x+2.$, ..., $y-1.$ napok között páratlan sokszor kell akciós napnak lennie. Ugyanez viszont elmondható a nem akciós napokra is, vagyis az $x+2.$, ..., $y-1.$ napok között a nem akciós napok száma is páratlan. Összesen így az $x+2.$, ..., $y-1.$ napok páros sokan vannak, ami ellentmondás.

Most belátjuk, hogy a fenti feltétel elégséges is. Azaz ha a 2-es blokkok között mindenhol páros sok 1-es van, akkor az akciós napok kijelölhetők a feltételeknek megfelelően. Egy lehetséges kijelölés a következő: a 2-es blokkok első napja akciós legyen, a második pedig nem. Ezeken kívül pedig az összes 1-es blokk legyen akciós. Ekkor bármely két szomszédos 2-es blokkban különböző az étel, így a nem akciós napokon felváltva lesznek az ételek. Mivel minden blokkban egy akciós nap van, az akciós napokon is váltakoznak az ételek.

XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

Egy megrendelést beazonosít az alábbi két információ, melyek egymástól függetlenül választhatók meg:

- az első napi étel,
- valamint az, hogy az 1-es és 2-es blokkok milyen sorrendben követik egymást.

Világos, hogy az első napi étel kétféle lehet. Most határozzuk meg, hogy hányféle lehet a blokkok sorrendje. Lehet minden blokk 1-es, ez 1 eset. Most számoljuk meg azokat az eseteket, amikor van 2-es blokk. Mivel a blokkok szerkezete olyan, hogy bármely két 2-es blokk között páros sok 1-es van, ezért a 2-es blokkok kezdőnapjai vagy mind páratlan, vagy mind páros sorszámú napon vannak. Utóbbi esetben az ételsorozatok felírhatók az előbbi esetből kapott ételsorozatok tükörképeként (mivel az év napjainak száma páratlan), így e szimmetria miatt elegendő az előbbi esettel foglalkoznunk.

Az évben az 1., 3., 5., ..., 363. sorszámú napok közül mindegyik vagy kezdőnapja egy 2-es blokknak, vagy nem. Utóbbi esetben az adott nap és az azt követő nap is 1-es blokk, így ez a $364/2 = 182$ információ meghatározza a blokksorrendet, és mindegyikük külön-külön megválasztható. Így a blokkok sorrendje 2^{182}-féle lehet, de azt az esetet már az elején számoltuk, amikor nincs 2-es blokk. Így $2^{182}-1$ blokksorrendünk van; a tükrös esetekkel, valamint a csupa 1-es esettel együtt $2\cdot(2^{182}-1)+1 = 2^{183}-1$.

Összességében tehát (az első napi étel szabad megválasztását is figyelembe véve) a lehetséges megrendelések száma $2 \cdot (2^{183} - 1) = 2^{184} - 2$.

E4. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n-re az n pozitív osztóin felvett függvényértékek összege kettőhatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1)$, $f(2), \ldots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k.
A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Az n pozitív osztói közé beleértjük az 1-et és az n-et is. Azon számokat tekintjük kettőhatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

Megoldás: A legkisebb ilyen szám az 512.

Először megmutatjuk, hogy ennél kevesebb nem lehet. Legyen $f^+(n)$ az n pozitív osztóin felvett függvényértékek összege.

Ekkor $f^+(1) < f^+(2) < \ldots < f^+(1024)$ különböző kettőhatványok, tehát $f^+(1024) \geq 1024$, és $f^+(512) \leq \frac{1}{2}f^+(1024)$. Ebből $f(1024) = f^+(1024) - f^+(512) \geq \frac{1}{2}f^+(1024) \geq 512$.

Már csak adnunk kell egy konstrukciót, amire ez lesz a válasz. Írjuk fel $n > 1$-et $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ alakban, ahol a p_i-k páronként különböző prímszámok, valamint $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ minden $1 \leq i \leq k$-ra. Ezt használva legyen $f(n) = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-k}$. Valamint legyen $f(1) = 1$.

Ha $n \leq 2026$, akkor $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leq 10$, és $n > 1$-re $k \geq 1$, tehát $f(n) \leq 512$. Így már csak azt kell belátni, hogy $f^+(n)$ kettőhatvány lesz minden n-re.

Ezt n különböző prímtényezőinek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = p^\alpha$, akkor $f^+(n) = f(1) + f(p) + \ldots + f(p^\alpha) = 1 + 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\alpha-1} = 2^\alpha$, ami kettőhatvány.

Most tegyük fel, hogy n-nek van legalább két különböző prímosztója. Ekkor léteznek egymáshoz relatív prím a és b pozitív egészek, melyekre $ab = n$, és a-nak és b-nek is kevesebb prímosztója van, mint n-nek. Például a fenti prímtényezős felbontást használva $a = p_1^{\alpha_1}$, $b = \frac{n}{a}$ jó választás.

Vegyük észre, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $f(ab) = f(a)f(b)$, valamint ha a osztói $a_1, a_2, \ldots, a_l$ és b osztói $b_1, b_2, \ldots, b_m$, akkor ab osztói felírhatók a_ib_j alakban, ahol $1 \leq i \leq l$ és $1 \leq j \leq m$, hiszen ezek mind osztják ab-t és különbözők. Ebből $f^+(n) = f(a_1b_1) + f(a_1b_2) + \ldots + f(a_1b_m) + f(a_2b_1) + \ldots + f(a_2b_m) + \ldots + f(a_lb_1) + \ldots + f(a_lb_m) = f(a_1)f(b_1) + f(a_1)f(b_2) + \ldots + f(a_1)f(b_m) + f(a_2)f(b_1) + \ldots + f(a_2)f(b_m) + \ldots + f(a_l)f(b_1) + \ldots + f(a_l)f(b_m) = (f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_l))(f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_m)) = f^+(a)f^+(b)$.

Az indukció szerint $f^+(a)$ és $f^+(b)$ is kettőhatvány, tehát a szorzatuk, $f^+(n)$ is az, így kész vagyunk.

Megjegyzés: a megoldásban kapott konstrukció ugyanaz, mint az, amit úgy kapunk, hogy minden n-re növekvő sorrendben $f(n)$-t beállítjuk a legkisebb olyan értékre, amire $f^+(n)$ kettőhatvány.

XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

E5. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácspontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d, ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácspontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácspontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnan is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácspontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.
Két megmaradt rácspont akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

Megoldás: Belátjuk, hogy d tetszőleges lehet.

Minden páros d távolságra konstruálunk egy olyan rácsponthalmazt, amelyre igaz, hogy bármely két rácspont távolsága legalább d, de a megmaradó rácspontokat Gandalf nem tudja bejárni a kívánt módon.

Zárja ki Sauron azokat az (a, b) rácspontokat, melyekre $d|a$ és $d|b$.

Színezzük ki sakktáblaszerűen a négyzetrácsot fekete-fehérre. Mivel d páros, az összes kizárt pont egyszínű.

Tegyük fel indirekten, hogy Gandalf be tudja járni a megmaradt rácspontokat.

A bejárás egy *szakasza* alatt olyan rácspontokat értünk, melyeket Gandalf egymás után járt be. Minden szakaszon a fehér és fekete mezők felváltva vannak, tehát a számuk különbsége legfeljebb 1.

Tekintsünk tetszőleges $n \in \mathbb{Z}^+$-ra egy $dn \times dn$-es négyzetet, amiben nincs benne Gandalf kiindulópontja. Ebben a bejárt mezők Gandalf útján néhány diszjunkt szakaszra bomlanak, amiknek a két-két végpontja a négyzet oldalain van, tehát legfeljebb $2(dn-1)$ ilyen szakasz van. Ebből a négyzeten belül lévő megmaradt pontokon a fekete és fehér mezők számának különbsége legfeljebb $2(dn-1)$.

A négyzet összes pontján ez a különbség legfeljebb 1, a kizárt pontokon pedig n^2, tehát $2(dn-1) \geq n^2 - 1$.

Elég nagy n-re azonban $n^2 - 1 > 2dn - 2$, ami ellentmondás, tehát Gandalf valóban nem tudja bejárni a megmaradt pontokat.

E6. **Játék:** A játékvezető szétoszt egy kör mentén 6 mezőre összesen legfeljebb 30, de páros számú korongot. Két játékos felváltva lép, egy lépésben a soron következő játékos kiválaszt két szomszédos vagy másodszomszédos mezőt, melyek egyike sem üres, és elvesz róluk 1-1 korongot. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a kezdőállás ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Lásd a D6 feladat megoldását.

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

E+1. Egy $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt *varázslatosnak* nevezünk, ha minden n-re $\sum_{d|n} f(d)$ kettőhatvány. Határozzátok meg a legkisebb olyan k pozitív egészet, amelyre létezik olyan f varázslatos függvény, hogy az $f(1)$, $f(2), \ldots, f(2026)$ számok mindegyike legfeljebb k.

A $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli. Azon számokat tekintjük kettőhatványoknak, amik a 2 nemnegatív egész kitevős hatványai.

Megoldás: A legkisebb ilyen szám az 512.

1. Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy ennél kevesebb nem lehet. Legyen $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Ekkor $f^+(1) < f^+(2) < \ldots < f^+(1024)$ különböző kettőhatványok, tehát $f^+(1024) \geq 1024$, és $f^+(512) \leq \frac{1}{2} f^+(1024)$. Ebből $f(1024) = f^+(1024) - f^+(512) \geq \frac{1}{2} f^+(1024) \geq 512$.

Már csak adnunk kell egy konstrukciót, amire ez lesz a válasz. Írjuk fel n-et $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ alakban, ahol a p_i-k páronként különböző prímszámok, valamint $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ minden $1 \leq i \leq k$-ra. Ezt használva legyen $f(n) = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-k}$.

Ha $n \leq 2026$, akkor $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leq 10$, és $n > 1$-re $k \geq 1$, tehát $f(n) \leq 512$. Így már csak azt kell belátni, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ kettőhatvány lesz minden n-re.

Ezt n különböző prímtényezőinek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = p^\alpha$, akkor $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{i=0}^{\alpha} f(p^i) = 1 + \sum_{i=1}^{\alpha} 2^{i-1} = 2^\alpha$, ami kettőhatvány.

Most tegyük fel, hogy n-nek van legalább két különböző prímosztója. Ekkor léteznek egymáshoz relatív prím a és b pozitív egészek, melyekre $ab = n$, és a-nak és b-nek is kevesebb prímosztója van, mint n-nek. (Például a fenti prímtényezős felbontást használva $a = p_1^{\alpha_1}$, $b = \frac{n}{a}$ jó választás.)

Vegyük észre, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $f(ab) = f(a)f(b)$, valamint ha $c \mid a$ és $d \mid b$, akkor c és d is relatív prímek. Ebből $f^+(n) = \sum_{c|a} \sum_{d|b} f(cd) = \sum_{c|a} \sum_{d|b} f(c)f(d) = f^+(a)f^+(b)$, hiszen n osztói pontosan azok a számok, amik előállnak a és b egy-egy osztójának a szorzataként, és ezek a szorzatok mind különbözők.

Az indukció szerint $f^+(a)$ és $f^+(b)$ is kettőhatvány, tehát a szorzatuk, $f^+(n)$ is az, így kész vagyunk.

2. Megoldás:

Az alsó becslést az első megoldás szerint csináljuk.

A felső becsléshez először definiáljuk $f^+(n)$-t a következőképpen: ha $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, akkor $f^+(n) = 2^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$.

Erre igaz, hogy $f^+(n)$ kettőhatvány, tehát csak az kell, hogy van olyan f függvény, ami mindenhol egy pozitív egész, és ezt az f^+-t adja.

Ehhez használjuk a Möbius-féle inverziós képletet, ami szerint

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, f^+\left(\frac{n}{d}\right), \qquad \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \exists\, k:\ k^2 \mid d, \\ (-1)^k, & \text{ha } d \text{ egyenlő } k \text{ különböző prím szorzatával.} \end{cases}$$

Ebből

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f^+\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} 2^{s-i} = 2^{s-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \cdot 2^{k-i} = 2^{s-k}(2-1)^k = 2^{s-k},$$

ahol $s = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, ami egy nemnegatív egész, tehát kész vagyunk.

Megjegyzés: mindkét megoldásban kapott konstrukció ugyanaz, mint az, amit úgy kapunk, hogy minden n-re növekvő sorrendben $f(n)$-t beállítjuk a legkisebb olyan értékre, amire $f^+(n)$ kettőhatvány.

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

E+2. Sauron a végtelen egységnégyzetrácsból kitörölt néhány, akár végtelen sok rácspontot úgy, hogy bármely két kitörölt pont euklideszi távolsága legalább d, ahol d egy rögzített pozitív szám. Ezután Gandalf be szeretné járni a megmaradt rácspontokat a rácsvonalak mentén úgy, hogy mindig csak szomszédos megmaradt rácspontra lép és mindegyiken pontosan egyszer jár. Észrevették, hogy Gandalf akárhonnan is indulna, nem tudja a kívánt módon bejárni a megmaradt rácspontokat. Határozzátok meg d összes lehetséges értékét, amelyre ez teljesülhet.
Két megmaradt rácspont akkor szomszédos, ha a távolságuk 1.

Megoldás: Lásd a E5 feladat megoldását.

E+3. Az ABC háromszög magasságpontja legyen H, a BC oldal felezőpontja M. Legyen D olyan pont a BC egyenesen, amelyre $DH \perp AM$, valamint M tükörképe B-re legyen E. Továbbá tegyük fel, hogy BE Thalész-körének és AHD köréírt körének létezik két metszéspontja, legyenek ezek X és Y. Bizonyítsátok be, hogy X, Y és M egy egyenesre esnek.

Megoldás: Legyen ω a BC szakasz Thalész-köre, ennek M a középpontja és rajta van T és R, amik rendre a B-ből és C-ből induló magasságok talppontjai. Legyen TR és BC metszéspontja D', erről belátjuk, hogy D-vel megegyezik. A $BCTR$ húrnégyszögben 3-féleképpen lehet átlók metszéspontját venni, ezek A, H és D', tehát a Brocard-tétel szerint A polárisa ω-ra nézve $D'H$, ami így merőleges AM-re, és hasonlóan D' polárisa AH. Mivel $D'H \perp AM$ és $DH \perp AM$, így $D' = D$. Másrészt $AH \perp DM$ és $DH \perp AM$, tehát M az AHD háromszög magasságpontja. Így M tükörképe az AH egyenesre az nem más mint BC egyenes és az AHD második metszéspontja (vagy D, ha érinti BC-t), legyen ez a pont M', az AH magasság talppontja P.

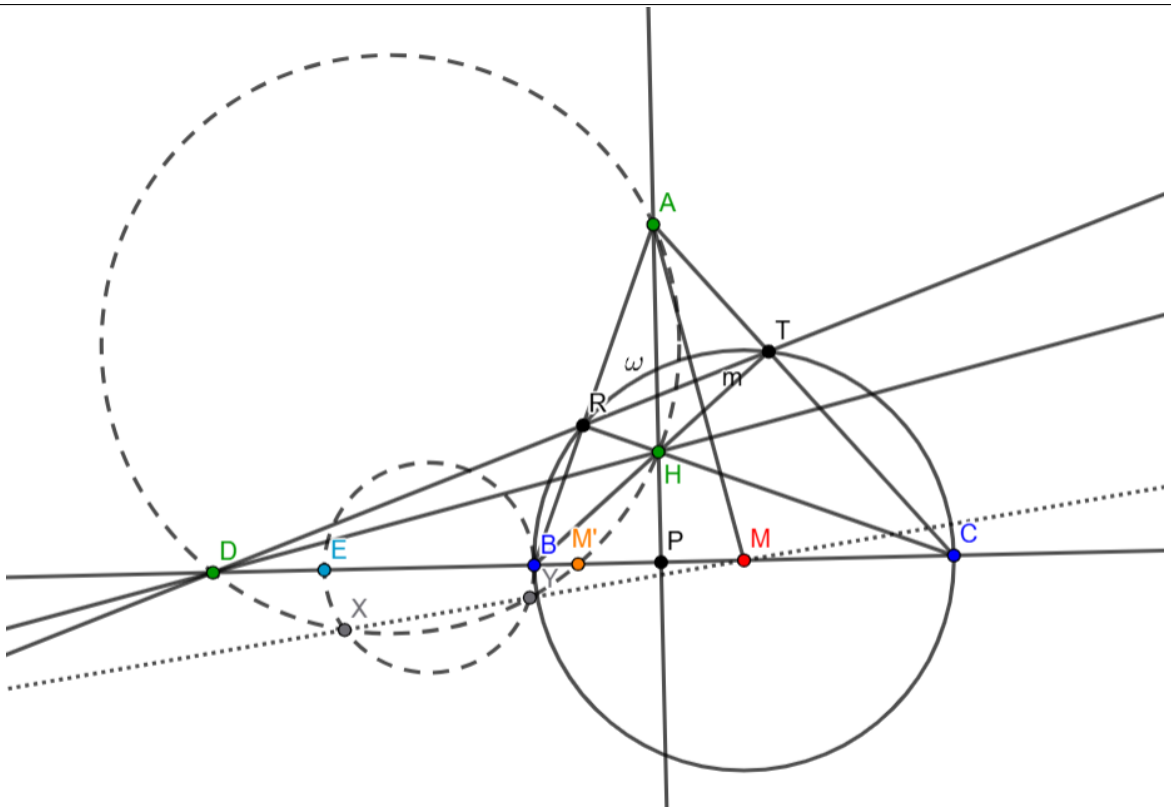
D polárisa ω-ra AP, tehát D inverze ω-ra P, így

$$MP \cdot MD = MB^2$$

Megszorozva mindkét oldalt kettővel

$$MM' \cdot MD = ME \cdot MB$$

azaz az M'-nek ugyanaz az $(AHDM')$ körre és BE Thalész-körére vonatkozó hatványa, tehát M rajta van a hatványvonalukon, ami az XY egyenes.



E+4. Egy gráf csúcsait megszámozzuk a következőképpen: minden csúcsra egy olyan pozitív egészet írunk, ami legfeljebb a csúcs fokszáma. Egy véges, egyszerű, összefüggő gráfot *szépnek* nevezünk, ha minden ilyen számozás mellett létezik a gráfban olyan séta, amelynek a kezdő- és végpontja tetszőleges, valamint minden csúcsban pontosan annyiszor jár, mint a csúcson lévő szám. Legkevesebb hány éle lehet egy $n > 1$ csúcsú szép gráfnak?
Egy gráfséta során a csúcsokat és az éleket többször is érinthetjük.

Megoldás: Egy ilyen gráfnak legkevesebb

$$e(n) = \begin{cases} k(k-1)+1 & \text{ha } n = 2k \\ k^2+1 & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases}$$

éle lehet.

Először megmutatjuk, hogy ez elérhető. Látható, hogy $e(n)$ éppen az élek száma abban az n csúcs gráfban, melyben a csúcsok két minél egyenlőbb osztályba vannak osztva, melyek osztályon belül egy teljes klikket alkotnak, és a két klikk össze van kötve egy éllel. Általánosabban igazoljuk, hogy ha egy $n+1$ és egy $m+1$ csúcsú klikket összekötünk egy éllel, a kapott $G = A \cup B$ gráf szép lesz.

Legyenek a csúcsok $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$, ahol az A, illetve B által feszített részgráfok teljesek, valamint van még egy él a_0 és b_0 között. Legyen az x csúcs fokszáma $d(x)$, a ráírt érték $1 \le f(x) \le d(x)$.

Először készítünk egy listát, melyben az a_i $(1 \le i \le n)$ értékek szerepelnek, mindegyik pontosan $f(a_i)$-szer, és két szomszédos csúcs nem ugyanaz. Ehhez válasszuk ki azt az i-t, melyre $f(a_i)$ maximális, és írjuk le a_i-t $f(a_i)$-szer egymás után. Most tetszőleges sorrendben szúrjunk közbe a_j $(i \neq j)$ értékeket, a_j-t legfeljebb $f(a_j)$-szer, hogy egy olyan listát kapjunk, melyben felváltva jön a_i és más csúcs.

Ezt meg lehet tenni, hiszen $f(a_i) \le d(a_i) = n$ és $f(a_j) \ge 1$, illetve éppen $n-1$ darab j index van, melyre $i \neq j$, tehát például használhatjuk az összes ilyen indexet egyszer. Ha maradt a_j érték, melyet nem használtunk $f(a_j)$-szer, akkor ezeket tetszőleges sorrendben szúrjuk be két olyan érték közé, amik

közül egyik sem a_j. Ezt meg lehet tenni: a listánk legalább $2f(a_i)-1$ hosszú, tehát $2f(a_i)$ helyre lehet beszúrni, és egy lépésben legfeljebb $2(f(a_j)-1) \leq 2(f(a_i)-1)$ helyre nem lehet beszúrni, tehát készen vagyunk.

Most szúrjuk be a_0-t $f(a_0)$-szor az elkészült lista végére, illetve a listában szereplő számok közé úgy, hogy semelyik két szomszédos szám közé nem szúrjuk be kétszer. Ezt meg lehet tenni, hiszen a lista hossza legalább n, és $f(a_0) \leq d(a_0) = n+1$. Szimmetrikusan készítsük el ezt a listát a B gráfra is, úgy, hogy az b_0-lal kezdődjön. Végül írjuk egymás után a két listát. Ez egy, a feltételeknek megfelelő séta lesz G csúcsain.

Most rátérünk az alsó korlát bizonyítására.

Vegyük észre, hogy ha egy csúcsra a fokszáma van írva, és minden szomszédjára 1, akkor az csak úgy lehet, ha a séta egyik végpontja. Ugyanis ha nem végpont lenne, akkor minden alkalommal, mikor a csúcsra lépünk, előző lépésben az egyik szomszédján voltunk, és ezenkívül még az egyik szomszédján jártunk az utolsó érintése utáni lépésben is, tehát összesen legalább eggyel többször, mint a foka. Viszont a szomszédain összesen annyiszor jártunk, mint ami a foka, ez ellentmondás. Ebből látszik, hogy G-ben nincs 3 nagyságú független ponthalmaz, mert akkor ezekre a fokszámukat, minden másra 1-et írva azt kapnánk, hogy ezek mind végpontjai a sétának, ami ellentmondás.

Így a Turán (vagy Mantel) tétel komplementere miatt legalább annyi éle van, mint annak a gráfnak, melyben két, nagyjából egyenlő nagyságú klikk van, és az optimum csak erre a gráfra teljesül. Mivel G-nek triviálisan összefüggőnek kell lennie, a konstrukciónk optimális.

E+5. Legyen $P(x)$ egy olyan polinom, melynek minden együtthatója nemnegatív valós szám, továbbá $P(0) = 0$. Tegyük fel, hogy ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $P(-2025x) \geq -2025P(x)$. Legyenek $x_1, \ldots, x_{2026}$ olyan valós számok, melyek összege nemnegatív. Bizonyítsátok be, hogy ha minden x_i-re teljesül, hogy $-2025 \leq x_i \leq 1$, akkor

$$P\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2026}}{2026}\right) \leq \frac{P(x_1) + \ldots + P(x_{2026})}{2026}.$$

Megoldás: Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ számok negatívak, az $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{2026}$ számok pedig nemnegatívak. Ha az összes szám nemnegatív, akkor $k = 0$.

Mivel minden $1 \leq i \leq k$-ra $-2025 \leq x_i < 0$, így $0 < -\frac{x_i}{2025} \leq 1$. Legyen $y_i = -\frac{x_i}{2025}$. Ekkor az $y_1, \ldots, y_k$ számokra alkalmazható a megadott egyenlőtlenség: $P(x_i) \geq -2025P(y_i)$. Összeadva:

$$P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_k) \geq -2025\left(P(y_1) + P(y_2) + ... + P(y_k)\right)$$

Azonban vegyük észre, hogy

$$P(y_1) + P(y_2) + \ldots + P(y_k) \leq P(y_1 + y_2 + ... + y_k),$$

ami azért igaz, mert ha a jobb oldalt kibontjuk polinomként, akkor a bal oldal minden tagja szerepelni fog a jobb oldalon is, illetve még nemnegatív együtthatós tagok, melyekbe a pozitív y_i-k polinomjai vannak beírva, tehát ezek összege biztosan nemnegatív. Így

$$P(x_1) + \ldots + P(x_{2026}) \geq -2025((P(y_1) + \ldots + P(y_k)) + P(x_{k+1}) + \ldots + P(x_{2026}) \geq$$

$$\geq -2025P(y_1 + y_2 + ... + y_k) + (k-1)P(0) + P(x_{k+1}) + \ldots + P(x_{2026})$$

használva, hogy $P(0) = 0$. Azonban a $P(x)$ polinom a nemnegatív valósokon konvex, mert második deriváltja is egy nemnegatív együtthatós polinom, ami nemnegatív valósokon nemnegatív értéket vesz fel. Ezért a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$(k-1)P(0) + P(x_{k+1}) + P(x_{k+2}) + \ldots + P(x_{2026}) \geq 2025P\left(\frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{2026}}{2025}\right).$$

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Kifejtős megoldókulcs**

Mostantól az egyszerűség kedvéért legyen $X = \frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_{2026}}{2025}$ és $Y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$. Ekkor világos, hogy elég belátnunk, hogy

$$\frac{2025P(X) - 2025P(Y)}{2026} \geq P\left(\frac{2025X - 2025Y}{2026}\right),$$

hiszen $2025X - 2025Y = x_1 + x_2 + ... + x_{2026}$. Ehhez először az kell, hogy

$$\frac{2025P(X) - 2025P(Y)}{2026} \geq \frac{2025}{2026}P(X - Y),$$

ugyanis $P(X - Y) + P(Y) \leq P(X)$, megint alkalmazva, hogy $P(a) + P(b) \leq P(a + b)$ tetszőleges a, b nemnegatív számokra, ahogy fent bizonyítottuk. Továbbá

$$\frac{2025}{2026}P(X - Y) \geq P\left(\frac{2025}{2026}(X - Y)\right),$$

mert mindkettőt $X - Y \geq 0$ polinomjaként felírva a bal oldalon minden tag szorzója $\frac{2025}{2026}$ lesz, míg a jobb oldalon az i-edfokú tag szorzója $\left(\frac{2025}{2026}\right)^i$, ami kisebb vagy egyenlő lesz $i \geq 1$ esetén. Azonban $P(0) = 0$, vagyis P konstans tagja 0, tehát a bal oldalon az összes tag szorzója legalább akkora, mint a jobb oldalon, és mivel minden tag nemnegatív, ez elegendő. Az utolsóként kapott két egyenlőtlenség egymás után fűzése pedig pont az, amit meg szerettünk volna kapni.

E+6. **Játék:** A játék kezdetén a játékvezető felír nyolc pozitív egész számot az első szintre, és megad egy k pozitív egész számot, ami nem nagyobb a nyolc szám összegénél. Egy lépésben a soron következő játékos letöröl két számot ugyanarról a szintről és az összegüket az eggyel nagyobb sorszámú szintre írja. Az a játékos nyer, aki először ír olyan számot, ami legalább k.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a nyolc szám és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Legyenek a számok az első szinten: $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_8$. A második, harmadik és negyedik szinten lévő számok szintenként a leírás sorrendjében: b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2 és d.

A második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $a_1 + a_2 + a_7 + a_8 < k$ és $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geq k$.

Tegyük fel, hogy valamelyik feltétel nem teljesül. Megmutatjuk, hogy az elsőnek van nyerő stratégiája.

Az első játékos az első lépésben írja a $b_1 = a_1 + a_2$-t. Ha ezzel nem nyer, akkor ezután a második játékos ír egy $b_2 \geq a_7 + a_8$ számot. Ezzel ő nem tud nyerni, mivel $b_2 \leq b_1$. Következő lépésben az első játékos a $c_1 = b_1 + b_2 \geq a_1 + a_2 + a_7 + a_8$-t írja. Ha ez legalább k, akkor nyer az első játékos. Ha ez kisebb, mint k, akkor a feltevésből tudjuk, hogy az $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < k$. A következő három lépésben a legnagyobb előállítható szám a $c_2 = b_3 + b_4 \leq a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < k$, így az első játékos fog nyerni a $d = c_1 + c_2 \geq k$-val.

Most mutassuk meg, hogy a második játékos tud nyerni, ha mindkét feltétel teljesül. Mivel $a_1 + a_2 < k$, ezért csak a c_1, c_2 és d számokkal lehet nyerni.

Az első játékos először ír egy b_1-et, majd a második játékos az alsó szinten megmaradó két legkisebb számot összeadva ír egy b_2-t. Ezután az első játékos készít egy $c_1 = b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2 + a_7 + a_8 < k$ számot, vagy egy b_3-t. Ha b_3-at ír, akkor a második játékos készíti el a $c_1 = b_1 + b_2 < k$ számot. Így a következő szám, amivel lehet nyerni, az c_2 lesz. Látható, hogy a c_2 pontosan a 6. lépésben tud létrejönni, így a második játékos fogja leírni. Mivel nem lesz benne a_7 és a_8, mivel azok b_1 vagy b_2-be kerültek, így $c_2 = b_3 + b_4 \geq a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geq k$, vagyis a második játékos fog nyerni.

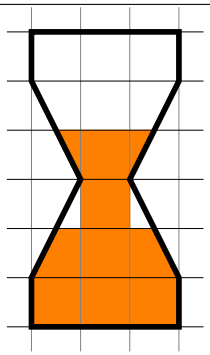
XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.)

Váltó feladatsor

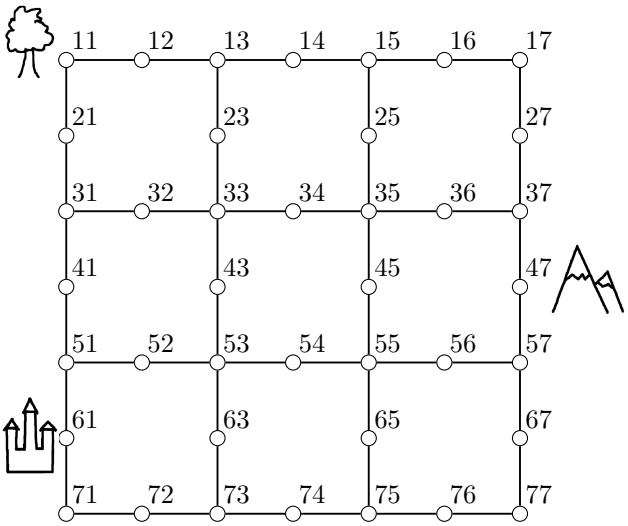


C-1. Az ábrán látható homokórában hány cm^2 a narancsszínű rész területe, ha egy kis négyzet területe 4 cm^2? (3 pont)

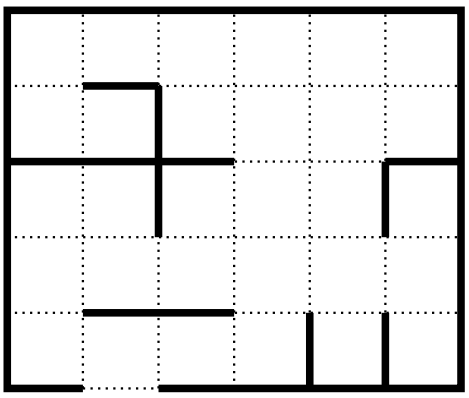
C-2. Drakula összeadta a csupa páros számjegyeket tartalmazó 2026-nál nem nagyobb pozitív egész számokat. Milyen számjegyre végződik ez az összeg? (3 pont)

C-3. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?
A kétjegyű pozitív egész számok a 9*-nél nagyobb és* 100*-nál kisebb egészek.* (3 pont)

C-4. Süsü a két bátyjával találkozott az ábrán körrel jelölt tisztások valamelyikén. Ezután mindhárman elkezdtek egyszerre egy-egy lepkét kergetni. Süsü egyik bátyja 60 perc múlva érkezett a Nagy Hegyekhez, míg a másik bátyja 70 perc múlva a Százéves Tölgyfához. Süsü nem emlékszik arra, hogy mikor érkezett meg, de abban biztos, hogy 35 perc elteltével már a Várban teázott a Kiskirályfival. Mi annak a tisztásnak a kódja, ahonnan indultak, ha bármely két, az ábrán szomszédos tisztás 10 perc sétára van egymástól?
Süsü és a bátyjai nem feltétlenül a legrövidebb úton haladtak a céljaik felé. Minden lépésben egy tisztásról egy szomszédos tisztásra mentek át egyenként 10 *perc alatt, és sosem várakoztak.* (3 pont)



C-5. Az elvarázsolt labirintus nevű játék során egy 5×6 négyzetből álló játéktáblán kerül kialakításra egy labirintus, melyben bármely két szomszédos mező között vagy fal van, vagy szabadon lehet közlekedni. A labirintusnak pontosan egy kijárata van, valahol a tábla szélén. Legfeljebb hány fala lehet a labirintusnak a játék végén, ha az útvesztő bármely mezőjéről el lehet jutni bármelyik másikra?
A labirintust mindenhonnan fal határolja kívülről, kivéve a kijáratánál. Például az ábrán látható labirintusnak 33 fala van. (4 pont)



XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

C-6. Áronnak van egy bangladesi és egy német zászlója, melyek téglalap alakúak, és mindkettő rövidebbik oldalának hossza 48 cm. Németország zászlajának oldalaránya 2 : 3, Bangladesé pedig 3 : 5. Banglades zászlója egy zöld alapon piros körlap. Áron az asztalán egymásra helyezte ezt a két zászlót úgy, hogy a rövidebb oldalaik illeszkedtek egymásra. Meglepődve vette észre, hogy a bangladesi zászlón lévő kör középpontja pont a német zászló középpontjára került. Hány centiméterrel van elcsúsztatva Banglades zászlaján a kör középpontja a zászló középpontjához képest? (4 pont)

C-7. Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három kancsó 20 fokos teája van. Gandalf a három kancsó teát úgy szeretné felszolgálni, hogy mindhárom 80 fokra van melegítve. Gandalf egy időben két kancsó teát tud egyszerre melegíteni. Ha egy kancsó teát éppen melegít, akkor annak a hőmérséklete percenként 3 fokot emelkedik, ha pedig nem melegíti, akkor percenként 1 fokot csökken. Legalább hány percre van szüksége Gandalfnak ahhoz, hogy a három kancsó egyszerre legyen legalább 80 fokos?
Egy kancsó tea tetszőleges hőmérsékletre lehűlhet vagy felmelegedhet. (4 pont)

C-8. Hány olyan perc van egy nap folyamán, amikor a digitális órán négy egymást követő számjegy látszik?
Az óra éjfélkor 23:59-ről 00:00-ra vált. Például a 21:03 ilyen perc, de a 09:12 nem az. (4 pont)

C-9. Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz, hogy a párbajozást gyakorolják. Hányféleképpen teheti ezt meg?
Két párbaállítást akkor tekintünk különbözőnek, ha valakinek más a párja az egyikben, mint a másikban. (5 pont)

C-10. Zsuzsi és Zsófi a kínai nagy falon sétáltak. Zsuzsi kíváncsi volt, hogy mi Zsófi házszáma, ezért megkérdezte tőle. Zsófi nem árulta el, de azért azt elmondta, hogy a házszámnak pontosan hat pozitív osztója van, amik közül az egyik a számjegyeinek összege, továbbá Zsófi utcájában a házak 1-től 60-ig vannak számozva. Hány olyan szám van, amely a fenti információk alapján lehetne Zsófi házszáma? (5 pont)

C-11. Az 5×5-ös sakktáblára szeretnénk elhelyezni 5 bástyát úgy, hogy egyik se kerüljön a főátlóra, és ne üssék egymást. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
Főátlónak a bal felső sarokból jobb alsó sarokba menő átlót nevezzük. Két bástya akkor üti egymást, ha egy sorban vagy oszlopban vannak és nincs köztük másik bábu. (5 pont)

XIX. Dürer Verseny

C

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

C-12. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?
Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek. (5 pont)

C-13. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalnál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, négyzetszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?
Juliska könyvének az oldalai 1-től n-ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszakapjuk ugyanazt a számot. (6 pont)

C-14. Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata? (6 pont)

	9	11	8	9		10
10		6			5	1
7						
			5			
		3			1	6

C-15. A félvér táborban 12 istálló van, melyek egy 3×4-es négyzetrács négyzeteiként helyezkednek el. Kheirón, a tábor vezetője azt a feladatot adta Annabeth Chase-nek, hogy ossza fel a 12 istálló rendberakását Percy, Grover és Thalia között úgy, hogy mindhárman 4 istállót rakjanak rendbe. Hányféle beosztást készíthetett Annabeth, ha mindhárman összefüggő területeket kaptak?
Két beosztást akkor tekintünk különbözőnek, ha volt olyan istálló, ahova mást osztott be. (6 pont)

C-16. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek? (6 pont)

XIX. Dürer Verseny

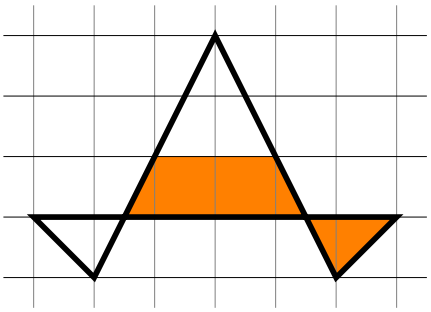
D

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

D-1. Drakula összeadta a csupa páros számjegyeket tartalmazó 2026-nál nem nagyobb pozitív egész számokat. Milyen számjegyre végződik ez az összeg? (3 pont)

D-2. Az ábrán látható kalapban hány cm^2 a narancsszínű rész területe, ha egy kis négyzet területe 4 cm^2? (3 pont)



D-3. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?
A kétjegyű pozitív egész számok a 9*-nél nagyobb és* 100*-nál kisebb egészek.* (3 pont)

D-4. Áronnak van egy bangladesi és egy német zászlója, melyek téglalap alakúak, és mindkettő rövidebbik oldalának hossza 48 cm. Németország zászlajának oldalaránya 2 : 3, Bangladesé pedig 3 : 5. Banglades zászlója egy zöld alapon piros körlap. Áron az asztalán egymásra helyezte ezt a két zászlót úgy, hogy a rövidebb oldalaik illeszkedtek egymásra. Meglepődve vette észre, hogy a bangladesi zászlón lévő kör középpontja pont a német zászló középpontjára került. Hány centiméterrel van elcsúsztatva Banglades zászlaján a kör középpontja a zászló középpontjához képest? (3 pont)

D-5. Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három kancsó 20 fokos teája van. Gandalf a három kancsó teát úgy szeretné felszolgálni, hogy mindhárom 80 fokra van melegítve. Gandalf egy időben két kancsó teát tud egyszerre melegíteni. Ha egy kancsó teát éppen melegít, akkor annak a hőmérséklete percenként 3 fokot emelkedik, ha pedig nem melegíti, akkor percenként 1 fokot csökken. Legalább hány percre van szüksége Gandalfnak ahhoz, hogy a három kancsó egyszerre legyen legalább 80 fokos?
Egy kancsó tea tetszőleges hőmérsékletre lehűlhet vagy felmelegedhet. (4 pont)

D-6. Hány olyan perc van egy nap folyamán, amikor a digitális órán négy egymást követő számjegy látszik?
Az óra éjfélkor 23:59-ről 00:00-ra vált. Például a 21:03 ilyen perc, de a 09:12 nem az. (4 pont)

D-7. Zsuzsi és Zsófi a kínai nagy falon sétáltak. Zsuzsi kíváncsi volt, hogy mi Zsófi házszáma, ezért megkérdezte tőle. Zsófi nem árulta el, de azért azt elmondta, hogy a házszámnak pontosan hat pozitív osztója van, amik közül az egyik a számjegyeinek összege, továbbá Zsófi utcájában a házak 1-től 60-ig vannak számozva. Hány olyan szám van, amely a fenti információk alapján lehetne Zsófi házszáma? (4 pont)

XIX. Dürer Verseny

D

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

D-8. Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz, hogy a párbajozást gyakorolják. Hányféleképpen teheti ezt meg?
Két párbaállítást akkor tekintünk különbözőnek, ha valakinek más a párja az egyikben, mint a másikban. (4 pont)

D-9. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?
Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek. (5 pont)

D-10. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalnál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, négyzetszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?
Juliska könyvének az oldalai 1-től n-ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszakapjuk ugyanazt a számot. (5 pont)

D-11. Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e érintője. Legyen f egy olyan egyenes, ami merőleges e-re és k-t két különböző pontban metszi. Legyenek f-nek az e-vel, illetve k-val való metszéspontjai rendre E, A és B, ebben a sorrendben elhelyezkedve f-en. Legyen az e és BO egyenesek metszéspontja I. Legyen g az I-ből k-hoz húzott e-től különböző érintő, az érintési pontja legyen J. Tudjuk, hogy g merőleges e-re. Legyen továbbá a BI és az AJ egyenesek metszéspontja H, valamint legyen az AH szakasz hossza x. Mennyi $(x^2-4)^2$? (5 pont)

D-12. A félvér táborban 12 istálló van, melyek egy 3×4-es négyzetrács négyzeteiként helyezkednek el. Kheirón, a tábor vezetője azt a feladatot adta Annabeth Chase-nek, hogy ossza fel a 12 istálló rendberakását Percy, Grover és Thalia között úgy, hogy mindhárman 4 istállót rakjanak rendbe. Hányféle beosztást készíthetett Annabeth, ha mindhárman összefüggő területeket kaptak?
Két beosztást akkor tekintünk különbözőnek, ha volt olyan istálló, ahova mást osztott be. (5 pont)

XIX. Dürer Verseny

D

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

D-13. Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata? (6 pont)

	9	11	8	9		10
10		6			5	1
7						
			5			
		3			1	6

D-14. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek? (6 pont)

D-15. Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű a legkisebb olyan pozitív egész n, amelyre $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$? (6 pont)

D-16. Az ábrán látható hét négyzetbe szeretnénk valamilyen sorrendben beírni az $1, 2, \ldots, 7$ számokat úgy, hogy a feltüntetett egyenlőtlenségek mind igazak legyenek. Minden négyzetbe egy számot írhatunk be és minden számot pontosan egyszer használhatunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

$$\square < \square > \square < \square > \square < \square > \square$$

(6 pont)

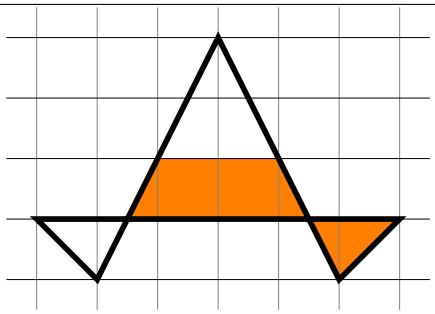
XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

E-1. Az ábrán látható kalapban hány cm^2 a narancsszínű rész területe, ha egy kis négyzet területe 4 cm^2? (3 pont)



E-2. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?
A kétjegyű pozitív egész számok a 9*-nél nagyobb és* 100*-nál kisebb egészek.* (3 pont)

E-3. Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három kancsó 20 fokos teája van. Gandalf a három kancsó teát úgy szeretné felszolgálni, hogy mindhárom 80 fokra van melegítve. Gandalf egy időben két kancsó teát tud egyszerre melegíteni. Ha egy kancsó teát éppen melegít, akkor annak a hőmérséklete percenként 3 fokot emelkedik, ha pedig nem melegíti, akkor percenként 1 fokot csökken. Legalább hány percre van szüksége Gandalfnak ahhoz, hogy a három kancsó egyszerre legyen legalább 80 fokos?
Egy kancsó tea tetszőleges hőmérsékletre lehűlhet vagy felmelegedhet. (3 pont)

E-4. Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz, hogy a párbajozást gyakorolják. Hányféleképpen teheti ezt meg?
Két párbaállítást akkor tekintünk különbözőnek, ha valakinek más a párja az egyikben, mint a másikban. (3 pont)

E-5. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?
Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek. (4 pont)

XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

E-6. Boti, a bébi bástya egy minden irányban végtelen sakktáblán él. Boti minden éjszaka alva jár, ami során mindig átmászik egy oldalszomszédos mezőre, arra viszont nem emlékszik hogy melyikre. Minden délben megmondja neki a sakk királynője, hogy az aktuális mezőjének a négy oldalszomszédján hányszor járt eddig. Ezt a négy számot mindig véletlenszerű sorrendben mondja, tehát Boti nem tudja, hogy közülük melyik szám melyik mezőre vonatkozik. Boti boldog egy napon, ha biztosan tudja, hogy olyan mezőn van, ahol már korábbi napon is volt. Leghamarabb hányadik napon lehet boldog Boti?
Boti először az első és második nap közti éjszakán jár alva, napközben nem változtat helyet és emlékszik arra, hogy a korábbi napokon miket mondtak neki. (4 pont)

E-7. Beni rajzol egy 7 élű valahány csúcsú összefüggő egyszerű gráfot. Az élekre ráírja az $1, 2, ..., 7$ számokat úgy, hogy minden számot egy élre ír és minden élre egy szám kerül. Ezután Gergő rajzol egy másik gráfot, melynek csúcsai az $1, 2, ..., 7$ számoknak felelnek meg, és akkor köt össze kettőt, ha a hozzájuk tartozó éleknek Beni gráfjában van közös csúcsa. Hányféle lehet ezek alapján Gergő gráfja, ha tudjuk, hogy nincs benne kör?
Két gráf különböző, ha van két csúcsuk, melyek az egyikben össze vannak kötve, a másikban pedig nem. Egy gráf akkor egyszerű, ha nem tartalmaz se többszörös élt, se hurokélt. (4 pont)

E-8. Egy varázslónak kezdetben van egy 1 koncentrációjú oldata kék, és egy 0 koncentrációjú oldata piros üvegben. A varázsló két, különböző színű üvegben lévő oldat segítségével képes a semmiből egy új oldatot varázsolni egy üres kék vagy piros üvegébe, aminek koncentrációja a két oldat koncentrációjának átlaga. Legfeljebb mennyi lehet 15 varázslat után a varázsló kék üvegeiben lévő oldatok koncentrációinak összege? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**
Az oldatok nem tölthetőek át más üvegbe. Amikor a varázsló új oldatot varázsol, a két felhasznált üveg színe és tartalma nem változik. (4 pont)

E-9. Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e érintője. Legyen f egy olyan egyenes, ami merőleges e-re és k-t két különböző pontban metszi. Legyenek f-nek az e-vel, illetve k-val való metszéspontjai rendre E, A és B, ebben a sorrendben elhelyezkedve f-en. Legyen az e és BO egyenesek metszéspontja I. Legyen g az I-ből k-hoz húzott e-től különböző érintő, az érintési pontja legyen J. Tudjuk, hogy g merőleges e-re. Legyen továbbá a BI és az AJ egyenesek metszéspontja H, valamint legyen az AH szakasz hossza x. Mennyi $(x^2 - 4)^2$? (5 pont)

E-10. Legyen $a_1 = 3$, és minden $n \geq 1$ esetén legyen $a_{n+1} = 3^{a_n}$. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ számok közül hány végződik 7-es számjegyre? (5 pont)

E-11. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek? (5 pont)

XIX. Dürer Verseny

E

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

E-12. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalnál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, hatványszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?
Juliska könyvének az oldalai 1-től n-ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszakapjuk ugyanazt a számot, hatványszámoknak pedig azon pozitív egészeket, melyek előállnak a^b alakban, ahol a és b pozitív egészek és $b \geq 2$. (5 pont)

E-13. Egy 12 fős bűnbanda egy kerek asztal körül tart megbeszélést. Mindenki maga elé néz, vagy kölcsönösen beszélget valamelyik szomszédjával. Hányféleképpen nézhet ki a megbeszélés?
Két megbeszélést akkor tekintünk különbözőnek, ha van két olyan ember, akik az egyik esetben beszélgetnek egymással, a másikban nem. (6 pont)

E-14. Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata? (6 pont)

	9	11	8	9		10
10		6			5	1
7						
		3			1	6

E-15. Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű a legkisebb olyan pozitív egész n, amelyre $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$? (6 pont)

E-16. Mógus professzor megkérte Harryt, hogy gondoljon 4 különböző pozitív egész számra, majd írja fel egy lapra az összes nem üres részhalmazukban a számok összegét és ne mutassa meg. Ezután Harry összeszorozta a papíron szereplő 15 számot, azonban mielőtt Harry elmondta volna az eredményt, Mógus professzor mondott egy olyan pozitív egész számot, amelyről biztosan tudja, hogy osztja ezt a szorzatot. Mi a legnagyobb szám, amit Mógus professzor mondhatott? **Válaszként a megoldás 10000-es maradékát adjátok meg!** (6 pont)

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

E$^+$-1. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely megegyezik a számjegyei összegének és a számjegyei szorzatának összegével?
A kétjegyű pozitív egész számok a 9*-nél nagyobb és* 100*-nál kisebb egészek.* (3 pont)

E$^+$-2. Boti, a bébi bástya egy minden irányban végtelen sakktáblán él. Boti minden éjszaka alva jár, ami során mindig átmászik egy oldalszomszédos mezőre, arra viszont nem emlékszik hogy melyikre. Minden délben megmondja neki a sakk királynője, hogy az aktuális mezőjének a négy oldalszomszédján hányszor járt eddig. Ezt a négy számot mindig véletlenszerű sorrendben mondja, tehát Boti nem tudja, hogy közülük melyik szám melyik mezőre vonatkozik. Boti boldog egy napon, ha biztosan tudja, hogy olyan mezőn van, ahol már korábbi napon is volt. Leghamarabb hányadik napon lehet boldog Boti?
Boti először az első és második nap közti éjszakán jár alva, napközben nem változtat helyet és emlékszik arra, hogy a korábbi napokon miket mondtak neki. (3 pont)

E$^+$-3. Egész számok egy 10 elemű H halmazának összes nem üres részhalmazára képezzük a részhalmaz elemeinek összegét, az így kapott 1023 szám szorzatát jelölje P. Mennyi az olyan prímszámok összege, amelyek bármely, a leírt tulajdonságokkal rendelkező H halmazra osztják a H-hoz tartozó P szorzatot?
A halmaz minden eleme különböző. (3 pont)

E$^+$-4. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3 feladat szerepel. A feladatok négy témakörre vannak bontva: algebra, geometria, számelmélet és kombinatorika. A szervezők előzetesen minden témakörből kiválasztanak 3 könnyű, 3 közepes és 2 nehéz feladatot. Ezekből a feladatokból állítja össze a zsűri a feladatsort úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- Az 1. és 4. könnyű, a 2. és 5. közepes, a 3. és 6. nehéz legyen.
- Az 1-es, 2-es, 4-es és 5-ös feladatok között mind a négy témakör szerepeljen.
- Egyik nap sem lehet két azonos témakörű feladat.

Hányféle feladatsort állíthat össze a zsűri, ha 1. feladatnak egy algebra feladatot fognak kitűzni?
Az első napon az 1., 2. és 3., a másodikon pedig a 4., 5. és 6. feladatok szerepelnek. (3 pont)

E$^+$-5. Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e érintője. Legyen f egy olyan egyenes, ami merőleges e-re és k-t két különböző pontban metszi. Legyenek f-nek az e-vel, illetve k-val való metszéspontjai rendre E, A és B, ebben a sorrendben elhelyezkedve f-en. Legyen az e és BO egyenesek metszéspontja I. Legyen g az I-ből k-hoz húzott e-től különböző érintő, az érintési pontja legyen J. Tudjuk, hogy g merőleges e-re. Legyen továbbá a BI és az AJ egyenesek metszéspontja H, valamint legyen az AH szakasz hossza x. Mennyi $(x^2-4)^2$? (4 pont)

E$^+$-6. Moriarty professzor végtelen sokszor feldob egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb dob 6-ost, mint három alkalommal páratlan számot? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**
A három páratlan számot nem kell közvetlenül egymás után dobnia. (4 pont)

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

E$^+$-7. Egy varázslónak kezdetben van egy 1 koncentrációjú oldata kék, és egy 0 koncentrációjú oldata piros üvegben. A varázsló két, különböző színű üvegben lévő oldat segítségével képes a semmiből egy új oldatot varázsolni egy üres kék vagy piros üvegébe, aminek koncentrációja a két oldat koncentrációjának átlaga. Legfeljebb mennyi lehet 15 varázslat után a varázsló kék üvegeiben lévő oldatok koncentrációinak összege? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**
Az oldatok nem tölthetőek át más üvegbe. Amikor a varázsló új oldatot varázsol, a két felhasznált üveg színe és tartalma nem változik. (4 pont)

E$^+$-8. Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának az egyenesét berajzoltuk. Hány szabályos háromszöget határoznak meg ezek az egyenesek? (4 pont)

E$^+$-9. Egy 12 fős bűnbanda egy kerek asztal körül tart megbeszélést. Mindenki maga elé néz, vagy kölcsönösen beszélget valamelyik szomszédjával. Hányféleképpen nézhet ki a megbeszélés?
Két megbeszélést akkor tekintünk különbözőnek, ha van két olyan ember, akik az egyik esetben beszélgetnek egymással, a másikban nem. (5 pont)

E$^+$-10. Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni, hogy melyik két oldalnál van nyitva Juliska könyve. A kérdései alapján kiderült számára, hogy a két nyitott oldal száma között volt palindromszám, hatványszám, csupa páros számjegyből álló szám és ötös számjegyet tartalmazó szám is, valamint az egyik szám legalább 10. Legfeljebb mennyi lehet Juliska könyvében a legnagyobb oldalszám, ha ennek ismeretében Jancsi ki tudja találni Juliska válaszaiból, hogy hányadik oldalaknál van nyitva?
Juliska könyvének az oldalai 1-től n-ig vannak számozva és Jancsi tudja n értékét, viszont azt nem tudja, hogy a könyv bal vagy jobb oldalai vannak páros számokkal számozva. Azon számokat nevezzük palindromszámoknak, amelyek számjegyeit fordított sorrendben leírva visszakapjuk ugyanazt a számot, hatványszámoknak pedig azon pozitív egészeket, melyek előállnak a^b alakban, ahol a és b pozitív egészek és $b \geq 2$. (5 pont)

E$^+$-11. Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű a legkisebb olyan pozitív egész n, amelyre $t(2n) = \frac{2}{9}t(n)$? (5 pont)

E$^+$-12. Jelölje $T_k(q(x))$ a $q(x)$ polinom legfeljebb k-adfokú tagjaiból képzett polinomot. Legyen $p(x)$ egy 2026-odfokú egész együtthatós polinom, amelyre $T_i(p(x))$ osztja $p(x)$-et minden $0 \leq i \leq 2026$ egészre. Legfeljebb hány különböző együtthatója lehet $p(x)$-nek?
Például $T_3\left(x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x - \frac{1}{2}\right) = 0x^3 + 2x^2 + 0x - \frac{1}{2}$. A $T_i(p(x))$ polinom akkor osztja a $p(x)$ polinomot, ha létezik olyan $t(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $T_i(p(x)) \cdot t(x) = p(x)$. (5 pont)

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó feladatsor**

E$^+$-13. Benedek két törtszámról tudja, hogy a szorzatuk egy egész szám és hogy őket egyszerűsített vegyes tört alakban felírva a felírt hat darab egész szám az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok. Hányféle lehet ennek a két törtnek a halmaza?
A $\frac{p}{q}$ törtszám egyszerűsített vegyes tört alakja $x\frac{y}{z}$, ahol x a szám egészrészével egyenlő és $\frac{y}{z}$ a szám törtrészének egyszerűsített tört alakja. (6 pont)

E$^+$-14. Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám összegeként. Mi a táblázat sarkaiba kerülő négy szám szorzata? (6 pont)

	9	11	8	9		10
10		6			5	1
7						
		3			1	6

E$^+$-15. Az ábrán látható kilenc négyzetbe szeretnénk valamilyen sorrendben beírni az $1, 2, \ldots, 9$ számokat úgy, hogy a feltüntetett egyenlőtlenségek mind igazak legyenek. Minden négyzetbe egy számot írhatunk be és minden számot pontosan egyszer használhatunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

$$\square < \square > \square < \square > \square < \square > \square < \square > \square$$

(6 pont)

E$^+$-16. Hány olyan trapéz van, amelynek oldalai egész hosszúságúak és a kerülete 85 egység?
Két trapézt akkor tekintünk különbözőnek, ha nem egybevágóak. (6 pont)

XIX. Dürer Verseny

C D

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó megoldókulcs**

#	MO	A feladat szövege	P
C-1	32	Az ábrán látható homokórában hány cm^2 a narancsszínű	3p
C-2	2	Drakula összeadta a csupa páros számjegyeket tartalmazó	3p
C-3	9	Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely	3p
C-4	52	Süsü a két bátyjával találkozott az ábrán körrel jelölt	3p
C-5	41	Az elvarázsolt labirintus nevű játék során egy 5×6	4p
C-6	4	Áronnak van egy bangladesi és egy német zászlója, melyek	4p
C-7	36	Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három	4p
C-8	30	Hány olyan perc van egy nap folyamán, amikor a digitális	4p
C-9	945	Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz,	5p
C-10	5	Zsuzsi és Zsófi a kínai nagy falon sétáltak. Zsuzsi kíváncsi	5p
C-11	44	Az 5×5-ös sakktáblára szeretnénk elhelyezni 5 bástyát	5p
C-12	7776	A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3	5p
C-13	625	Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni,	6p
C-14	120	Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$	6p
C-15	138	A félvér táborban 12 istálló van, melyek egy 3×4-es	6p
C-16	174	Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának	6p

#	MO	A feladat szövege	P
D-1	2	Drakula összeadta a csupa páros számjegyeket tartalmazó	3p
D-2	13	Az ábrán látható kalapban hány cm^2 a narancsszínű rész	3p
D-3	9	Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely	3p
D-4	4	Áronnak van egy bangladesi és egy német zászlója, melyek	3p
D-5	36	Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három	4p
D-6	30	Hány olyan perc van egy nap folyamán, amikor a digitális	4p
D-7	5	Zsuzsi és Zsófi a kínai nagy falon sétáltak. Zsuzsi kíváncsi	4p
D-8	945	Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz,	4p
D-9	7776	A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3	5p
D-10	625	Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni,	5p
D-11	8	Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e	5p
D-12	138	A félvér táborban 12 istálló van, melyek egy 3×4-es	5p
D-13	120	Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$	6p
D-14	174	Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának	6p
D-15	16	Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű	6p
D-16	272	Az ábrán látható hét négyzetbe szeretnénk valamilyen	6p

XIX. Dürer Verseny

E E+

kategória

Döntő (2026. február 6-8.) **Váltó megoldókulcs**

#	MO	A feladat szövege	P
E-1	13	Az ábrán látható kalapban hány cm^2 a narancsszínű rész	3p
E-2	9	Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely	3p
E-3	36	Gandalf vendégül látja Radagastot. Gandalfnak három	3p
E-4	945	Piton professzor 10 diákot szeretne párokba állítani ahhoz,	3p
E-5	7776	A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3	4p
E-6	5	Boti, a bébi bástya egy minden irányban végtelen	4p
E-7	2520	Beni rajzol egy 7 élű valahány csúcsú összefüggő egyszerű	4p
E-8	107	Egy varázslónak kezdetben van egy 1 koncentrációjú	4p
E-9	8	Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e	5p
E-10	2025	Legyen $a_1 = 3$, és minden $n \geq 1$ esetén legyen $a_{n+1} = 3^{a_n}$.	5p
E-11	174	Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának	5p
E-12	625	Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni,	5p
E-13	322	Egy 12 fős bűnbanda egy kerek asztal körül tart	6p
E-14	120	Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$	6p
E-15	16	Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű	6p
E-16	6912	Mógus professzor megkérte Harryt, hogy gondoljon 4	6p

#	MO	A feladat szövege	P
E^+-1	9	Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely	3p
E^+-2	5	Boti, a bébi bástya egy minden irányban végtelen	3p
E^+-3	17	Egész számok egy 10 elemű H halmazának összes nem üres	3p
E^+-4	7776	A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián mindkét nap 3	3p
E^+-5	8	Adott egy O középpontú egységsugarú k kör és egy e	4p
E^+-6	101	Moriarty professzor végtelen sokszor feldob egy szabályos	4p
E^+-7	107	Egy varázslónak kezdetben van egy 1 koncentrációjú	4p
E^+-8	174	Egy szabályos kilencszög összes oldalának és átlójának	4p
E^+-9	322	Egy 12 fős bűnbanda egy kerek asztal körül tart	5p
E^+-10	625	Juliska éppen olvasott, amikor Jancsi elkezdte találgatni,	5p
E^+-11	16	Jelölje $t(n)$ az n szám számjegyeinek összegét. Hány jegyű	5p
E^+-12	3	Jelölje $T_k(q(x))$ a $q(x)$ polinom legfeljebb k-adfokú	5p
E^+-13	3	Benedek két törtszámról tudja, hogy a szorzatuk egy egész	6p
E^+-14	120	Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$	6p
E^+-15	7936	Az ábrán látható kilenc négyzetbe szeretnénk valamilyen	6p
E^+-16	6391	Hány olyan trapéz van, amelynek oldalai egész	6p

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - C kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																	Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	Sajtmaffia	Fodor Éva Szász Edvin Bogdán István	9. 9. 9.	Báthory István Elméleti Líceum; Kolozsvár	Nagy Örs	11	11	9	8	12	12	63	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	0	5	6	6	0		55	118
2.	Sarkcsillag	Debreczeni Csoma Frey Annabell Laczkó Eszter	9. 9. 9.	Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest	Csikós Viktória, Danyi József Tamás	7	8	11	10	9	12	57	3	3	3	3	4	4	4	4	3	4	0	5	0				40	97
3.	Gyök	Bora Ádám Tóth Domonkos Tihor Laura	10. 10. 9.	Egri Dobó István Gimnázium; Eger	Dr. Pappné Balázs Judit	10	4	12	10	12	12	60	3	3	3	3	4	4	4	3	5	4	0	0	0				36	96
3.	Polinomok	Mika Balázs Száraz Dóra Mészáros Menyhért	9. 10. 10.	Eötvös József Gimnázium és Kollégium; Tata	Krisztin-Németh Andrea, Hédi Katalin, Frankel Beatrix	9	8	12	12	3	12	56	3	3	3	3	4	4	4	4	3	4	0	5	0				40	96
3.	Sajtburger	Daragus Csanád-Dávid Albert Réka Papp Zalán-Magor	9. 9. 9.	Székely Mikó Kollégium; Sepsiszentgyörgy	Deák Éva	6	10	12	12	12	12	64	3	3	3	2	4	4	4	3	0	0	0	0	6				32	96
6.	P2K	Pető Jázmin Lara Körmöndi Csanád Palik Ábris Csanád	9. 9. 9.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Pilzné Nagylaki Tünde	12	9	12	4	5	0	42	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	0	5	6	4			53	95
7.	Ér(TTT)készlet	Bessenyei Kirill Nagy Fanni Finta Boglárka	9. 10. 10.	Premontrei Szent Norbert Gimnázium, Egyházzenei Szakgimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Kollégium; Gödöllő	Veiber Erika, Dobronayné Gülch Bernadett	12	9	8	12	7	12	60	3	2	3	3	4	4	4	3	3	4	0	0	0				33	93
8.	TM1	Furman Csanád József Gazsi Levente Juhász-Nagy Lili	9. 9. 9.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Madarász Péter, Taricska Dávid	8	12	7	9	3	0	39	3	3	3	3	4	4	4	3	5	5	0	5	6	5	0		53	92
9.	mindegy	Tóth Dávid Révész Lilla Tóth-Gál Csongor	10. 10. 9.	Kisvárdai Bessenyei György Gimnázium és Kollégium; Kisvárda	Tóthné Bíró Andrea, Demeterné Papik Judit, Kristóf Melinda	8	11	8	2	4	12	45	2	3	3	3	4	4	3	4	5	5	0	0	5	5	0	0	46	91
10.	Thálesz - szobor	Steiner Botond Nagy Zalán Bollók Róza	9. 10. 10.	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, Kollégium és Óvoda; Miskolc	Bredács Éva, Szabóné Kató Hajnalka	8	12	9	9	12	12	62	3	3	3	3	4	3	0	4	0	5	0	0	0				28	90
11.	Könyves910c	Dezséri Enikő Bohák Gergely Bendegúz Zempléni Dániel	10. 10. 9.	Újpesti Könyves Kálmán Gimnázium; Budapest	Gellén Gabriella	6	6	5	6	6	6	35	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	0	4	6	6	0		54	89
12.	Nem π-sk(v)óták	Mihályi Zaránd Szepessy Mihály Mihályi Zselyke	10. 10. 9.	Premontrei Szent Norbert Gimnázium, Egyházzenei Szakgimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Kollégium; Gödöllő	Horváth Nóra, Dobronayné Gülch Bernadett	12	5	10	6	5	12	50	3	3	2	3	4	4	4	4	4	5	0	0					36	86
12.	NEU3	Bartók Réka Szűcs Benedek Doros Levente	9. 10. 10.	Neumann János Gimnázium, Technikum és Kollégium; Eger	Horváth Zita, Kormos Nóra, Bartalis Dávid	12	5	10	7	5	12	51	3	3	2	3	4	4	4	4	5	3	0	0	0				35	86
14.	Tuggyuk	Zólyomi Botond Csuvár Barnabás Tomkovics Sára	9. 9. 9.	Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium; Kecskemét	Reiterné Makra Zsuzsanna	2	6	3	12	10	12	45	3	3	3	3	4	4	4	2	5	5	0	0					36	81
15.	MI Jó?	Tömpe Hanga Illés Emma Józsa Csanád	9. 9. 10.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Németh Dorottya Csilla, Tobisch Márta, Gáspár Csaba	10	10	10	10	6	6	52	3	2	2	3	3	4	3	4	0	0	0						24	76

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - D kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	**BAL**	Ruskal Bendegúz Pál Gergely Alíz Medgyesi Lujza	12. 11. 12.	ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium; Budapest	Steller Gábor, Kornai Júlia, Lövey Éva	12	12	12	12	2	12	**62**	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	0	5	6	0			**49**	**111**
2.	**NEE**	Virga Eszter Borkó Erik Kurucz Nimród	12. 12. 11.	Kisvárdai Bessenyei György Gimnázium és Kollégium; Kisvárda	Budai-Kiss Ildikó, Tóthné Bíró Andrea	12	10	12	11	-	0	**45**	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	0	6	0			**49**	**94**
3.	**szétCSAPATlyuk**	Horváth Zsófia Laki Csanád Lipp Levente	11. 12. 12.	Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma; Pécs	Pánczél Róbert	12	4	12	12	0	0	**40**	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	0				**48**	**88**
4.	**Másodikok**	Szabó Dóra Laura Illés Brúnó Papp Nándor	9. 9. 9.	ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium; Budapest	Antal Zoltán	12	11	12	10	0	0	**45**	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	0	0					**38**	**83**
5.	**SaBuLe**	Füzes Bulcsú Sipos Levente Tömpe Sarolta	10. 11. 11.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Tobisch Márta, Gáspár Csaba, Szabó Zsanett	12	11	12	11	-	0	**46**	3	3	3	3	4	4	4	0	5	5	0						**34**	**80**
6.	**2.6 hog**	Elter Emma Mihálszky Dávid Tóth Zsófia Elza	10. 10. 10.	Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest	Kilinné Vörös Bernadett, Számadóné Békéssy Szilvia	12	11	3	12	3	0	**41**	3	3	3	3	3	4	4	2	5	5							**35**	**76**
7.	**Nomen est Omen**	Barcza Liza Miasnikov Máté Dörnyei Boldizsár	11. 11. 10.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium; Budapest	Ujházy Márton, Friedman Eszter, Steller Gábor	12	3	12	12	3	0	**42**	3	3	3	3	4	4	3	4	4	0	0						**31**	**73**
8.	**BBL Drizzy**	Téglás Ede Tatár Bence Hermány Hanna	12. 12. 9.	Székely Mikó Kollégium; Sepsiszentgyörgy	Oláh-Ilkei Árpád, Deák Éva	11	7	3	12	2	0	**35**	3	2	2	3	4	4	3	4	5	5	0	0	0				**35**	**70**
9.	**MóKÁSz**	Karáth Kornél Karáth Ábel Nagy Eszter	12. 9. 11.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Mohay Péter, Ujházy Márton, Friedman Eszter	6	7	12	5	-	0	**30**	3	3	3	3	4	2	4	4	5	5	0						**36**	**66**
10.	**Rúzsa Magdi**	Atanaszov Kornél Fülöp Vince Szrebro Zoé Júlia	10. 10. 10.	Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest	Kilinné Vörös Bernadett, Számadóné Békéssy Szilvia	11	7	3	5	-	6	**32**	3	3	0	3	4	0	4	0	0	4	4						**25**	**57**
11.	**F. B. A.**	Eninger Adél Vajda-Kolek Fülöp Mika Boglárka	11. 10. 11.	Eötvös József Gimnázium és Kollégium; Tata	Tóth Rita Anikó, Almádyné Orova Edit, Krisztin Németh Andrea, Perger Péter	10	10	3	6	0	0	**29**	3	3	3	3	3	3	4	0	0	5	0						**27**	**56**
12.	**NEU_5**	Tót Léna Sereg Szilárd Beller Benedek	12. 12. 11.	Neumann János Gimnázium, Technikum és Kollégium; Eger	Horváth Zita, Fülepné Bartkó Zsuzsanna	10	7	12	4	0	0	**33**	2	3	3	3	0	3	3	0	0	0							**17**	**50**
13.	**Szilvalekvár**	Zita Vivien Osztényi Áron Fekete Ádám	10. 10. 10.	Kecskeméti Katona József Gimnázium; Kecskemét	Nagyné Viszmeg Edit, Reiter István, Korom Krisztina	8	9	1	12	-	0	**30**	3	3	2	3	0	4	2	0	0	0	0	0					**17**	**47**

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - E kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	**Banán ö**	Zhu Che Szűcs Máté Nguyen-Kovács My Linh	11. 11. 11.	Szent István Gimnázium; Budapest	Molnár-Sáska Ildikó, Juhász Péter, Domán Dániel Gergő	12	9	9	12	2	12	**56**	3	3	3	2	4	4	4	4	5	5	0	5	0				**42**	**98**
2.	**Egy random csapat**	Chen JiaTong Li MingDao Lakner Hanna	12. 8. 12.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Szent István Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, dr. Kiss Géza, Magyar Zsolt, Juhász István	12	12	5	12	3	0	**44**	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	0	5					**43**	**87**
3.	**Totálisan Érett Kacsa**	Sarusi-Kis Balázs Kaposi-Ly Dávid Szkalka Bíborka	12. 12. 11.	ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium; Budapest	Steller Gábor, Kornai Júlia, Nagy Kartal, Harró Ágota	12	12	10	6	1	12	**53**	3	3	3	3	4	4	2	4	0	5	0	0				**31**	**84**
4.	**szemesfületlenek**	Tóth Luca Bodnár Ákos Novothny Petra	11. 11. 11.	Kempelen Farkas Gimnázium; Budapest	Romhányi Katalin, Damásdi Gábor	12	6	10	6	7	12	**53**	3	3	3	3	3	4	3	3	0	5	0	0				**30**	**83**
5.	**Rántott husi**	Kurucz Lilien Czanik Dániel Szabó Gergely	10. 10. 10.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Gyenes Zoltán, Farkas Gitta, Hujter Bálint	12	12	9	5	3	0	**41**	3	3	3	3	4	4	3	4	5	5	0					**37**	**78**
6.	**Mi ez a firkálmány?!**	Lukács Kristóf Pál Váradi Áron Béres Hedvig Johanna	9. 9. 11.	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, Kollégium és Óvoda; Miskolc	Bredács Éva, Szabóné Kató Hajnalka	12	9	2	0	3	12	**38**	3	3	3	0	3	3	3	2	0	5	0	4	0	5		**34**	**72**
7.	**Lineáris függetlenek**	Oros Áron Egyedi Bernadett Oros Nóra	9. 9. 12.	Premontrei Szent Norbert Gimnázium, Egyházzenei Szakgimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Kollégium; Gödöllő	Gelányi Ildikó, Hegedüsné Láng Andrea	12	8	9	-	1	0	**30**	3	3	3	3	4	4	0	3	0	4	0	0				**27**	**57**
7.	**tReap success**	Lehotai Gergely Lehotai Dávid Marossy Zsófia	12. 11. 11.	Pécsi Janus Pannonius Gimnázium; Pécs Pécsi Janus Pannonius Gimnázium; Pécs Kantonsschule; Zug	Meiszterics Zoltánné Ágnes, Dombi Anna, Gubser Stefan	12	11	10	1	1	0	**35**	3	3	3	3	4	2	4	0	0							**22**	**57**
9.	**67. matekhadtest**	Szűcs Kitti Kovács Dániel Kökény Kristóf	11. 12. 12.	Kecskeméti Katona József Gimnázium; Kecskemét	Reiter István, Dr. Nádháziné Borbola Éva	1	11	7	0	1	12	**32**	3	3	3	3	2	0	3	4	0	0	0					**21**	**53**
10.	**Papucs-tétel**	Dobai Emma Kádas Roland Félix Schwarczenberger Hanna	10. 10. 11.	Eötvös József Gimnázium és Kollégium; Tata	Németh Sarolta, Krisztin Németh Andrea, Tóth Rita, Almádyné Orova Edit, Hédi Katalin	3	12	1	0	3	0	**19**	3	3	2	0	4	0	0	0	0							**12**	**31**
11.	**Közönséges Kockáshátú Zimbabwe Rétikajmán**	Császár Anna Róza Sajter Klaus Bodor Ádám	12. 10. 10.	Márton Áron Főgimnázium; Csíkszereda	Csapó Hajnalka, Páll Olga	**nem jelentek meg**																							**0**

A XIX. Dürer Verseny (2025-2026) döntőjének eredményei - E+ kategória

							Kifejtős forduló							Váltóforduló																Pont
Hely	Országos hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	**1.**	**Kexin csapata**	Weng Kexin Prohászka Bulcsú Szakács Ábel	9. 12. 12.	Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, dr. Kiss Géza, Surányi László, Dobos Sándor, Nagy Kartal, Kovács Benedek, Kőnig Gergely, Feke Zsolt, Kopasz Tibor	12	11	12	3	0	12	**50**	3	3	3	3	4	4	3	4	5	5	5	5	6	6	0	0	**59**	**109**
2.	**2.**	**Fazekas**	Bodor Noémi Görömbey Tamás Vámosi Bendegúz Péter	11. 12. 12.	Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium; Debrecen	Balázs Tivadar, Tóth Mariann, Remeténé Orvos Viola, Mester Gyula	5	1	3	10	-	12	**31**	3	2	3	3	4	4	3	3	5	5	5	5	0	0			**45**	**76**
2.	**1.**	**NDVP U18**	Nermin Malićević Vuk Janković Amila Pašić		Sarajevo, Trebinje, Tuzla (Bosnia and Herzegovina)		7	12	12	0	0	12	**43**	3	3	3	2	4	0	3	0	5	5	0	5	0				**33**	**76**
4.	**3.**	**(I+H)F**	Balla Ignác Baran Júlia Bui Nikolett	10. 10. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium; Debrecen Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Farkas Gitta, Gyenes Zoltán, Kovács Péter, Remeténé Orvos Viola, Lenger Dániel, Dobos Sándor	11	3	12	0	0	12	**38**	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5							**37**	**75**
5.	**4.**	**Szájpenész**	Holló Martin Horák Zsófia Kocsis Péter	12. 11. 12.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Hujter Bálint, Lenger Dániel, Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, dr. Kiss Géza	11	1	0	10	0	12	**34**	3	3	3	2	0	2	4	0	5	4	0	3	0				**29**	**63**
6.	**5.**	**Fazékban pisztráng**	Su Wenlan Vödrös Dániel Virág Tóbiás	12. 11. 11.	Szent István Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Jeneiné Bicsák Krisztina, Dobos Sándor, Lenger Dániel, Gyenes Zoltán, Surányi László, Pósa Lajos, Simon Péter, Pereczes Marianna	12	-	10	-	4	0	**26**	3	3	3	3	3	4	3	3									**25**	**51**
7.	**6.**	**Gleisschotterbettungsreinigungsmaschine**	Csató Hanna Zita Sánta Gergely Varga Vivien	11. 11. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium; Szeged	Dobos Sándor, Lenger Dániel, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett, Schultz János, Gyenes Zoltán	5	1	2	12	-	0	**20**	3	3	3	3	4	4	3	2	4	0	0	0	0				**29**	**49**
8.	**1.**	**BoikoSuperMath_E+**	Vitaliy Galushko Dariia Balan Milania Akchurina		Kyiv, Kharkiv (Ukraine)		12	1	10	-	0	0	**23**	3	3	2	3	4	0	3	0									**18**	**41**
9.	**2.**	**Boiko Super Super Math**	Oleg Puzyrkov Volodymyr Gryn		Kharkiv (Ukraine)		12	1	12	-	-	0	**25**	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0						**12**	**37**