

Megoldások a C, C+, D, D+ kategóriák feladataihoz
(matematika, 9-12. osztályosok)

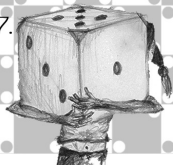
1. (C1.) 10 gyerek ül egy kör alakú asztal körül, fiúk és lányok vegyesen. Minden fiútól balra egy kék pólós, minden lánytól jobbra egy zöld pólós ül. Hány lány ül az asztalnál?

Megoldás:

Két eset van: vagy ül két azonos nemű egymás mellett, vagy nem. Először azt nézzük meg, amikor ülnek egymás mellett azonos neműek. A szimmetria miatt és az egyszerűség kedvéért legyen ez két fiú. A baloldali – a feltételek miatt – kék pólós és a tőle balra ülő is kék pólós. Ha az utóbbi kék pólós gyerek lány lenne, mellette jobbra viszont zöld pólós kellene, hogy legyen, ami ellentmondás. Emiatt a két fiú mellett balra is fiú ül. Ezt a gondolatmenetet balra haladva ismételve azt kapjuk, hogy körbeértünk és mindenki fiú. Ez viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy vegyesen vannak. (Ez a gondolatmenet hasonlóan elvégezhető, ha két egymás melletti lányból indulunk ki.)

Így egy a feltételeknek megfelelő leülés csak olyan lehet, amelyben nincs két azonos nemű egymás mellett. Ez azt jelenti, hogy minden fiú mellett mindkét oldalról lány ül és minden lány mellett két fiú. Könnyen leellenőrizhető, hogy ha minden lányon kék és minden fiún zöld póló van, akkor a feltételek teljesülnek. Ekkor 5 fiú és 5 lány ül az asztalnál, ez az egyetlen megoldás.

Tehát a válasz az, hogy 5 lány ül az asztalnál.



2. (C2., D1.) Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat. Egy lépésben két számot letörlünk, és felírjuk helyettük az összegüket és a szorzatukat. (Így minden lépés után pontosan öt szám lesz a táblán.) El lehet-e érni néhány ilyen lépéssel, hogy a táblán

- szerepeljen a 100-as szám?
- legyen 3 darab 12-es?
- legyen 4 darab 33-as?
- éppen a 26, 32, 41, 44, 52 számok szerepeljenek?

Megoldás:

a) El lehet érni, például a következő módon:

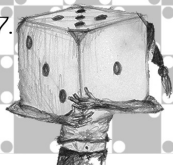
1	2	3	4	5
1	2	3	9	20
1	5	6	9	20
1	25	6	9	100

b) Ezt is el lehet érni:

1	2	3	4	5
6	2	3	4	5
6	2	7	12	5
6	2	12	12	35
8	12	12	12	35

c) Ha két páros számot törölünk le, helyettük két párosat írunk fel, ha egy páratlant és egy párosat törölünk le, egy páratlant és egy párosat írunk fel, végül ha két páratlant törölünk le, egy párosat és egy páratlant írunk fel. Így a páratlan számok száma nem nőhet, és kezdetben 3 páratlan szám volt, tehát nem lehet 4 darab 33-as a táblán.

d) A táblán mindig lesz 5-tel osztható szám, mert kezdetben ott az 5, ha pedig letörlünk egy 5-tel oszthatót, felírjuk a szorzatát egy másik számmal, az is osztható lesz 5-tel. A végén tehát nem állhat 26, 32, 41, 44, 52 a táblán, mert nincsen köztük 5-tel osztható. (Ugyanez a gondolatmenet 3-as oszthatóságra is működik.)



3. (C+1., D+1.) Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat. Egy lépésben két számot törölünk, és felírjuk helyettük az összegüket és a szorzatukat. (Így minden lépés után pontosan öt szám lesz a táblán.) Legfeljebb hány 35-ös állhat egyszerre a táblán néhány ilyen lépés után?

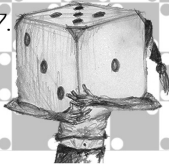
Megoldás: Két 35-ös állhat a táblán:

1	2	3	4	5
1	2	7	12	5
1	2	12	12	35
3	2	12	12	35
5	6	12	12	35
17	6	60	12	35
17	18	60	72	35
35	306	60	72	35

Most tegyük fel, hogy néhány lépés után három 35-ös szerepel a táblán. A páratlan számok száma nem nőhet (lásd **C2., D1. c)** rész), és ha két páratlan szám helyett írjuk fel a szorzatukat és összegüket, csökken is. Tehát, mivel kezdetben három páratlan szám volt, csak úgy lehet végül három 35-ös, ha két páratlant sosem törölünk le. Emiatt a 35-ösök csak összegként kerülhetnek fel a táblára. Ha viszont egy 35-öst összegként kapunk, akkor

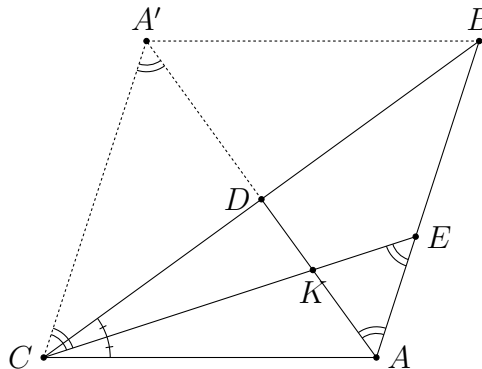
- vagy $35 = 1 + 34$, ekkor elhasználjuk az egyetlen 1-est, és szorzatként felkerül a táblára a 34, amit így már nem használhatunk 35-ös előállítására
- vagy felkerül a táblára szorzatként egy 35-nél nagyobb szám, ami szintén nem használható 35 előállítására.

Így a második 35-ös táblára írásánál lesz két olyan számunk, amit nem használhatunk már fel, vagyis nem tudjuk a harmadik 35-öst előállítani. Így nem szerepelhet kettőnél több 35-ös a táblán.



4. (C3.) Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$. Legyen E az AB oldalon úgy, hogy $\angle ACE = \angle ECB = 18^\circ$, illetve legyen D a CB oldal felezőpontja. Ha tudjuk, hogy AD hossza 3 egység, akkor milyen hosszú CE ?

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit, legyen K az AD és EC szakaszok metszéspontja. Tükrözzük az A csúcsot a BC oldalra. Mivel az ABC háromszög egyenlőszárú és BC az alapja, így AD merőleges a BC oldalra (hiszen AD megegyezik az A -ból induló magasságvonallal). A tükrözés miatt $A'D$ is merőleges BC -re, tehát A, D és A' egy egyenesre esnek, valamint

$$AD = DA'. \quad (1)$$

Nyilvánvalóan $\angle BCA = \angle BCE + \angle ECA = 36^\circ$. Mivel az ABC háromszög egyenlőszárú, $\angle CAB = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ$. Így $\angle AEC = 180^\circ - \angle ECA - \angle CAB = 54^\circ$. Korábban megmutattuk, hogy $\angle ADB = 90^\circ$, így $\angle BAD = 90^\circ - \angle DBA = 54^\circ$. Ez viszont azt jelenti, hogy az AEK háromszögben $\angle EAK = \angle KEA = 54^\circ$, vagyis az AEK háromszög egyenlőszárú, tehát

$$AK = EK. \quad (2)$$

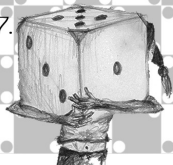
Mivel egy egyenlőszárú háromszögben az alappal szemközti csúcsból húzott magasságvonal megegyezik az ugyanebből a csúcsból húzott szögfelezővel, így $\angle DAC = 54^\circ$, és tükrözés miatt $\angle CA'D = \angle DAC = 54^\circ$. Ugyanígy a tükrözés miatt $\angle ACB = \angle BCA' = 36^\circ$, tehát $\angle KCA' = \angle KCD + \angle BCA' = 54^\circ$. Így viszont $\angle CA'K = \angle KCA'$, azaz a $KA'C$ háromszög egyenlőszárú, így

$$KA' = KC. \quad (3)$$

Végül (1)-et, (2)-t és (3)-at kihasználva:

$$EC = EK + KC = AK + KA' = AA' = AD + DA' = 2 \cdot DA = 6.$$

Tehát az EC szakasz 6 egység hosszú.



5. (C4., D4., C+3., D+2.) A különböző pozitív egészekből álló (p, q, r) számhármast *illuszt-ris*nak nevezzük, ha $p \mid q + r$, $q \mid r + 2p$, és $r \mid p + 3q$ is teljesül. Keressétek meg az összes illusztris (p, q, r) számhármast, ahol p, q és r is prímszám.

Megjegyzés: $x \mid y$ azt jelenti, hogy x osztója y -nak, azaz létezik olyan z egész szám, melyre $x \cdot z = y$.

Megoldás: Mivel p, q, r különböznek egymástól, ezért biztosan van köztük legnagyobb. Három esetet vizsgálunk meg:

i) Ha p a legnagyobb.

Ekkor $p > q; p > r$ miatt $2p > q + r$, de $p \mid q + r$, ezért $p = q + r$.

A másik két feltételbe beírva, kapjuk $q \mid 2q + 3r$ és $r \mid 4q + r$, innen $q \mid 3r$ és $r \mid 4q$. Mivel különböző prímelek, $q = 3$ és $r = 2$, így $p = 5$. Ezek tényleg jók is.

ii) Ha q a legnagyobb.

Ekkor $q > r; q > p$ miatt $3q > r + 2p$, de $q \mid r + 2p$, ezért $r + 2p = q$ vagy $r + 2p = 2q$.

Ha $r + 2p = 2q$, akkor $2 \mid r$ miatt $r = 2$ és $1 + p = q$, azaz $p = 2$ és $q = 3$, de ez nem lehetséges.

Ha $r + 2p = q$, akkor kapjuk $p \mid 2r + 2p$ és $r \mid 3r + 7p$, innen $p \mid 2r$ és $r \mid 7p$, ahonnan (mivel különbözők) $p = 2, r = 7$ és $q = 11$ adódik. Ezek tényleg jók is.

iii) Ha r a legnagyobb.

Ekkor $r > p; r > q$ miatt $4r > p + 3q$, de $r \mid p + 3q$, ezért $p + 3q = r$ vagy $p + 3q = 2r$ vagy $p + 3q = 3r$.

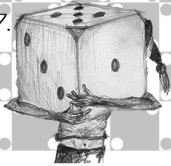
Ha $p + 3q = 3r$, akkor $3 \mid p$ miatt $p = 3$ és $1 + q = r$, azaz $q = 2$ és $r = 3$, de ez nem lehetséges.

Ha $p + 3q = r$, akkor kapjuk $p \mid p + 4q$ és $q \mid 3p + 3q$, innen $p \mid 4q$ és $q \mid 3p$, ahonnan $p = 2, q = 3$ és $r = 11$ adódik. Ezek tényleg jók is.

Ha $p + 3q = 2r$, akkor $p = 2r - 3q$, innen $q \mid 5r - 6q, q \mid 5r$, innen $q = 5$ adódik. Így $p + 15 = 2r$ és $p \mid r + 5$.

Tehát $p \mid 2(r + 5) - p = 10 + 2r - p = 25, p = 5$. Ez nem lehetséges.

Tehát a feladatnak 3 megoldása van: $p_1 = 5, q_1 = 3, r_1 = 2$; $p_2 = 2, q_2 = 11, r_2 = 7$; $p_3 = 2, q_3 = 3, r_3 = 11$.



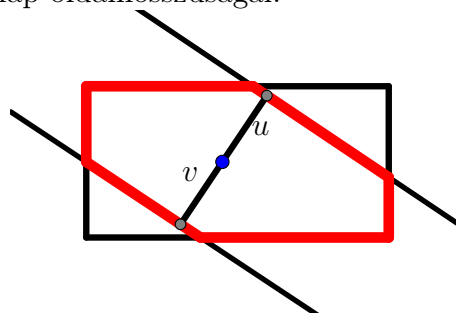
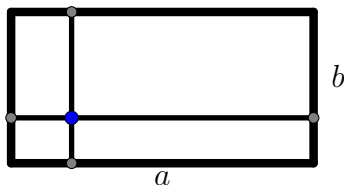
6. (C5., C+4.) Egy konvex n -szöget *szépnek* nevezünk, ha oldalai nem mind egyforma hosszúak, és tetszőleges belső pontjának az oldalegyenesektől mért távolságainak összege 1. Adjatok meg minden $n \geq 4$ egész számra egy szép n -szöget.

Megoldás:

Azt mutatjuk meg, hogy minden $n \geq 4$ -re meg tudunk adni olyan konvex n -szöget, amelyre igaz, hogy bármely belső pontjának az oldalegyenesektől mért távolságösszege állandó. Innen már nyilván adódik, hogy van szép n -szög is, hiszen azt megfelelő hasonlósági transzformációval könnyen el tudjuk érni, hogy ez az állandó érték 1 legyen.

A bizonyítás kettessel lépkedő teljes indukcióval fog történni. Jelöljük S_n -nel a meglévő n -szögünkre a tetszőleges belső pontnak az oldalegyenesektől mért távolságainak összegét!

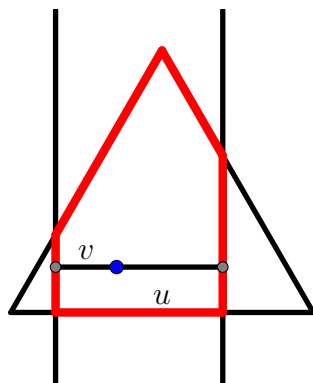
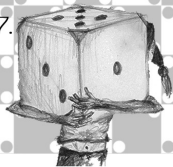
Először páros n -ekre ($n \geq 4$) bizonyítunk. $n = 4$ esetén bármelyik téglalap, amely nem négyzet jó lesz. Ekkor $S_4 = a + b$, ahol a és b a téglalap oldalhosszúságai.



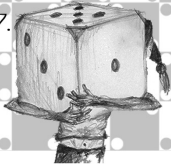
Hatszöget a következőképpen konstruálunk: a téglalapot két párhuzamos egyenessel csonkoljuk. Világos (a második ábra jelöléseit használva), hogy $S_6 = S_4 + u + v$, és ez állandó, hiszen S_4 és $u + v$ is állandó. Előbbi az indukció miatt, utóbbi pedig, mert mindig a két párhuzamos egyenes távolságát adja.

Hasonló csonkolással mindig konstruálhatunk egy szép n -szögből egy szép $(n + 2)$ -szöget. Csak két egymással párhuzamos, de olyan irányú egyenest kell választanunk, amelyekkel párhuzamos oldalunk még nincs az n -szögben, és ezekkel egy-egy csúcs körül le tudjuk csonkolni az n -szöget. Kellően kicsire választva a csonkolást, az is fenntartható, hogy az oldalak továbbra se legyenek egyforma hosszúak.

A páratlan n -ek eseteinek lefedéséhez elegendő megadni egy szép ötszöget, ebből csonkolással és indukcióval kapunk minden 5-nél nagyobb páratlan n -re is egy szép sokszöget. Ehhez először visszalépünk az $n = 3$ esetre. Van olyan háromszög, amelynek bármely belső pontjára teljesül, hogy az oldalegyenesektől mért távolságösszege állandó (szabályos háromszög). Az egyedüli szépséghibája az, hogy mindegyik oldala egyenlő, de ez most nem baj, mert ebből könnyen tudunk megfelelő ötszöget készíteni:

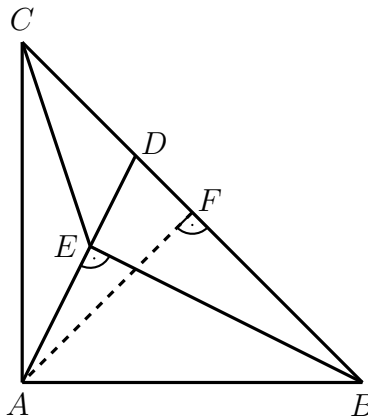


$S_5 = S_3 + u + v$, ez állandó lesz. Innen ismét indukcióval készen vagyunk.



7. (C+2.) ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben A -nál van a derékszög. D úgy helyezkedik el a BC oldalon, hogy $2CD = DB$. Legyen E a B merőleges vetülete az AD -re. Mekkora a CED szög?

Megoldás:



Állítsunk merőlegest az A csúsból a BC átfogóra. A talppontot jelölje F . Ha a -val jelöljük az átfogó hosszát ($BC = a$), akkor $CD = \frac{a}{3}$, $DB = \frac{2a}{3}$ (D pont a BC szakasz C ponthoz közelebbi harmadolópontja a $2 \cdot CD = DB$ feltétel miatt), valamint $CF = BF = \frac{a}{2}$ (F felezőpont). Mindezekből következik, hogy

$$DF = CF - CD = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}.$$

Vegyük észre, hogy az EDB háromszög hasonló az FDA háromszöghöz, mivel három szögük rendre megegyezik ($\angle EDB = \angle ADF$, hiszen közös szöge a két háromszögnek, $\angle FDA = \angle BED = 90^\circ$, így mivel a háromszögek belső szögeinek összege 180° , $\angle FAD = \angle DBE$), tehát felírható oldalaik között a következő arányosság:

$$\frac{DE}{DB} = \frac{DF}{DA},$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$DE \cdot DA = DB \cdot DF = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{6} = \frac{a^2}{9}.$$

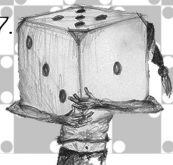
Mivel

$$CD \cdot CD = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{9} = DE \cdot DA,$$

ezért ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{CD}{DE} = \frac{DA}{CD}. \quad (4)$$

Elmondható tehát, hogy a CDE és az ADC háromszögek hasonlóak, mivel a (4)-ben látott két oldaluk aránya megegyezik, valamint az általuk bezárt szög is ($\angle CDE = \angle CDA$ közös). Emiatt a többi egymásnak megfelelő szögük is egyenlő, vagyis $\angle DEC = \angle ACD$, amiről tudjuk, hogy 45° (hiszen ABC háromszög A -nál derékszögű és egyenlő szárú). Így $\angle CDE = 45^\circ$, és ezt kerestük.



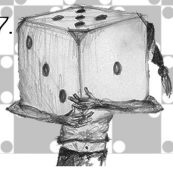
8. (C+5.) Van 51 darab súlyunk, mindegyikük tömege kg-ban kifejezve pozitív egész szám. Összesen 100 kg-ot nyomnak. Valaki sorbarakta a súlyokat. Mi egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjébe beletesszük az első súlyt. Ezután minden lépésben, ha nincsen egyensúlyban a mérleg, akkor a könnyebb felébe tesszük a sorban következő súlyt, ha pedig egyensúlyban van, akkor befejezzük a súlyok felrakását. Mutassátok meg, hogy a folyamat végén egyensúlyban lesz a mérleg.

Megoldás: Tegyük fel, hogy sohasem kerül egyensúlyba a mérleg.

Belátjuk, hogy a k . lépés után a mérleg mindkét serpenyőjében legalább $k - 1$ kilogram van. Könnyű látni, hogy az első lépés után legalább 0 mindkettő. A második lépés után az egyik serpenyőben lesz a sorban első súly, másikban a sorban második súly, azaz mindkettőben ≥ 1 kg van.

Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy a $k - 1$. lépés után mindkét oldalon legalább $k - 2$ kg van. Ekkor a könnyebb oldalra rakva egy súly, ott legalább $k - 1$ kg lesz. A nehezebb oldalon pedig eddig is legalább $k - 1$ kg volt, mert minden súly egész, és feltettük, hogy nincsenek egyensúlyban. Azaz a k . lépés után mindkét oldalon legalább $k - 1$ kg van.

Így eljutunk odáig, hogy mind az 51 súly felrakása után mindkét serpenyőben legalább 50 kg van. Ez csak akkor lehet, ha egyensúlyban vannak. Ellentmondásba kerültünk azzal, hogy sosem vagyunk egyensúlyban.



9. (D2.) Egy egyenlő szárú háromszögben berajzoltuk az egyik szögfelezőt. Az így kapott két kisebb háromszög közül legalább az egyik hasonló az eredetihez. Mekkora lehet az eredeti háromszög szára, ha alapjának hossza 1 egység?

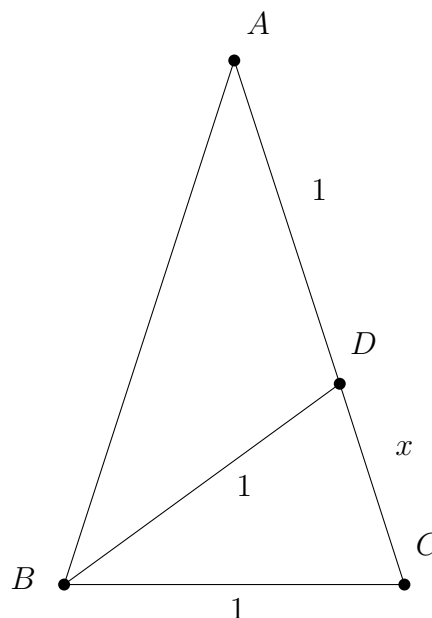
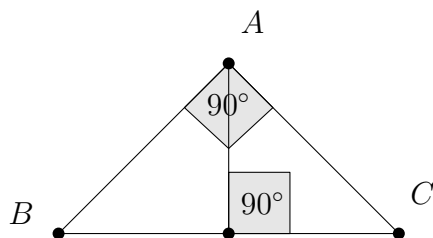
Megoldás:

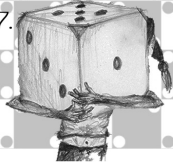
Ha a szárszög szögfelezőjét rajzoltuk be, akkor a két kisebb háromszög derékszögű, így az eredeti háromszög is derékszögű. Az egység alapú derékszögű egyenlő szárú háromszög szára $\frac{1}{\sqrt{2}}$ egység.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az egyik alapon fekvő szög szögfelezőjét rajzoltuk be. Legyen az ABC háromszögben $|AB| = |AC|$, legyen $BAC\angle = \alpha$, és legyen a $CBA\angle$ szögfelezőjének az AC szakasszal alkotott metszéspontja D . Az ABC háromszög nem lehet egyenlő oldalú, hiszen a szabályos háromszög szögfelezője által elválasztott háromszögek nem szabályosak; tehát az ABC háromszög alapon fekvő szögei nem lehetnek egyenlők α -val. Az ABD háromszögben $BAD\angle = BAC\angle = \alpha$, tehát az ABD háromszög csak úgy lehetne hasonló az ABC háromszöggel, ha a szárai az AB és az AD szakasz lennének, de $|AD| < |AC| = |AB|$.

Tehát csak a BCD háromszög lehet hasonló az ABC háromszöghöz. A $DCB\angle$ alapon fekvő szög az ABC háromszögben, tehát az ahhoz hasonló BCD háromszögben is csak alapon fekvő szög lehet. Így a $DBC\angle$ a szárszög, és $|BD| = |BC| = 1$. A hasonlóság miatt $DBC\angle = BAC\angle = \alpha$, és mivel a BD szakasz szögfelező, $DBA\angle = \alpha$, tehát a DAB háromszög is egyenlő szárú, és $|DA| = |BD| = 1$. Legyen $|CD| = x$; a hasonlóság miatt $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CD|}$, azaz $1 + x = \frac{1}{x}$. Átszorozva $x + x^2 = 1$, az egyenlet megoldása $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tehát az AC szár hossza $1 + x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

A szár hossza tehát $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ lehet.





10. (D3.) a) Egy társaság biciklitúrát tervez Budapestről Miskolcra. A 200 km hosszú út mentén ismernek néhány házat, ahol megpihenhetnek éjszakára. Tudjuk, hogy az úton (a kezdő- és a végpontot is beleértve) bármely két szomszédos ház távolsága legfeljebb 100 km. Megtehetik-e biztosan az utat 3 nap alatt, ha semelyik nap sem szeretnék 100 km-nél többet tekerni?

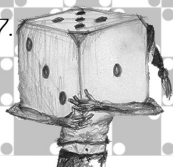
b) Hazafelé egy 300 km hosszú úton terveznek jönni, melyen szintén igaz, hogy bármely két szomszédos ház távolsága legfeljebb 100 km, a kezdő- és a végpontot is beleértve. Megtehetik-e biztosan a visszautat 4 nap alatt, ha semelyik nap sem szeretnék 100 km-nél többet tekerni?

Megoldás: a) Megtehetik. Első nap menjenek el az utolsó házig, ami nincs távolabb 100 km-nél. Azt tudjuk, hogy van ilyen ház, és ez nem a kezdőpont.

A második nap menjenek a következő házig. A feltételek miatt ekkor sem mennek 100 km-nél többet.

A harmadik nap menjenek el Miskolcig. Ekkor szintén nem mennek 100 km-nél többet, mivel a második napi ház távolabb van, mint 100 km.

b) Nem biztos, hogy megtehetik. Egy példa: 4 ház van az úton, a kezdéstől számítva 60, 120, 180, 240 km-re. Ekkor minden nap csak a következő házig jutnak, azaz 5 nap kell, hogy megtegyék a távot.



11. (D5.) a) Albrechtke kapott egy tábla mogyorós csokit, mely 4×6 „kockából” áll. A mogyorószemek sehol sem esnek a kockák határvonalaira. Minden nap megeszik belőle néhány kocka csokit, betartva a következő szabályokat:

- (i) az egy napon megevett kockáknak hiánytalan téglalapot kell alkotniuk;
- (ii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma páros.

Az el nem fogyasztott kockákat nem mozgatja; így a megmaradó csokoládé akár több különálló részből is állhat. Mutassátok meg, hogy ha Albrechtke ügyesen választja ki az egyes napokon megevendő részeket, akkor elérheti, hogy végül legfeljebb egy kocka csoki maradjon.

b) A következő tábla ugyanilyen csokinál Albrechtke a (ii)-es szabályt lecseréli a következő (iii)-as szabályra:

- (iii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma 3-mal osztható.

Legrosszabb esetben hány kocka fog megmaradni, ha Albrechtke a lehető legügyesebben eszi a csokit az (i)-es és (iii)-as szabályok együttes betartásával?

12. (D+3.) a) Albrechtke kapott egy tábla mogyorós csokit, mely 100×100 „kockából” áll. A mogyorószemek sehol sem esnek a kockák határvonalaira. Minden nap megeszik belőle néhány kocka csokit, betartva a következő szabályokat:

- (i) az egy napon megevett kockáknak hiánytalan téglalapot kell alkotniuk;
- (ii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma páros.

Az el nem fogyasztott kockákat nem mozgatja; így a megmaradó csokoládé akár több különálló részből is állhat. Mutassátok meg, hogy ha Albrechtke ügyesen választja ki az egyes napokon megevendő részeket, akkor elérheti, hogy végül legfeljebb egy kocka csoki maradjon.

b) A következő tábla ugyanilyen csokinál Albrechtke a (ii)-es szabályt lecseréli a következő (iii)-as szabályra:

- (iii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma 13-mal osztható.

Legrosszabb esetben hány kocka fog megmaradni, ha Albrechtke a lehető legügyesebben eszi a csokit az (i)-es és (iii)-as szabályok együttes betartásával?

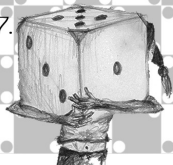
a) 1. Megoldás: Ha a csokiban összesen páros sok mogyoró van, Albrechtke azonnal felfal mindent.

Egyébként pedig Albrechtke a következő stratégiát követi: minden reggel kettétöri a táblát két téglalap alakú részre. Mivel összesen páratlan sok mogyoró van, a két rész egyikébe páros sok, a másikban páratlan sok fog esni. A páros részt megeszi, a másik részt pedig félreteszi másnapra.

Másnap a megmaradó, páratlan sok mogyoróból álló részt ismét kettétöri két téglalapra; az egyik rész ismét páros lesz, amit megehet, a maradékot (a páratlan részt) pedig ismét félreteszi.

Ezt Albrechtke mindaddig ismételheti, amíg a maradék csokit két téglalap alakú részre tudja törni, ami addig lehetséges, amíg a maradék téglalap legalább 2 kockából áll. Így a folyamat végén legfeljebb 1 kocka maradhat meg.

a) 2. Megoldás: Mielőtt Albrechtke elkezdené a csokit enni, úgy dönt, hogy kókuszreszeléket szór az összes olyan kockára, melyben páratlan sok mogyoró van. Így ezután a mogyorókat



nem kell figyelnie, csak az a lényeg, hogy minden nap páros sok kókuszos kockát egyen meg: ekkor a megevett adagokban mindig páros sok mogyoró lesz.

Ha a kókuszos kockák száma páros, akkor Albrechtke egy az egyben megehet mindent. Máskülönből lesz olyan sor, ahol páratlan sok kókuszos kocka van. Legyen az első ilyen sor az a . sor. Az a . sor fölött minden sorban páros sok kókuszos kocka van, tehát az az $a - 1$ db sor megehető egy nap alatt (ha egyáltalán léteznek, vagyis ha $a > 1$). Mivel az a . sor fölött összesen páros sok kókuszos kocka van, és az a . sorban pedig páratlan sok, tudjuk, hogy az a . sor alatt is páros soknak kell lennie (hiszen összesen páratlan sok van). Így egy darabban megehető az a . sor alatti sorok is, ha léteznek.

Ezek után már csak az a . sor maradt, melyben lényegében ugyanez a gondolatmenet megismételhető: vegyük az első kókuszos kockát. Az ezelőtti kockák nem tartalmazzak kókuszt, tehát azok megehetőek egyszerre, és az ezutániak is megehetőek egyszerre, hiszen páros sok kókusz van bennük. Így Albrechtke elérte, hogy 1 kocka maradjon meg.

b) Megoldás:

Az alábbi megoldásban a megevett részekre az a megkötés vonatkozik, hogy a mogyorók száma bennük p -vel osztható legyen, ahol p tetszőleges pozitív prím. A D kategória feladatában $p = 3$, a D+ kategóriában pedig a $p = 13$ eset szerepel. (Mindkét feladat a) részében pedig $p = 2$.) A tábla méretei nem fognak szerepet játszani. Látni fogjuk, hogy csak az számít, hogy mindkettő legalább $p - 1$.

Először megmutatjuk, hogy Albrechtke elérheti, hogy legfeljebb $(p - 1)^2$ kocka maradjon meg. Ehhez felhasználjuk az alábbi lemmát:

Lemma. Ha adott n egész szám egy sorban (a_1, a_2, \dots, a_n) , akkor közülük kiválasztható néhány szomszédos, melyek összege n -nel osztható.

Bizonyítás. Vegyük minden $0 \leq b \leq n$ -re a $b_k = \sum_{i=1}^k a_i$ összegeket. Mivel b_k -ből $n + 1$ db van, lesz közülük kettő, melyek n -es maradéka megegyezik, mondjuk b_x és b_y , ahol $x < y$.

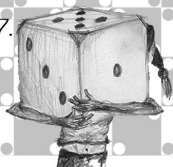
Ekkor $n \mid b_y - b_x = \sum_{i=x+1}^y a_i$, így találtunk $y - x > 0$ darab szomszédos a_i -t, melyek összege osztható n -nel. \square

A lemmából kiindulva most belátjuk, hogy ha adott egy $1 \times m$ -es csoki, akkor abból Albrechtke megehet úgy kockákat, hogy maximum $p - 1$ maradjon meg.

Tegyük fel, hogy Albrechtke az $1 \times m$ -es csokisorból a lehető legtöbb kockát megette. Ekkor belátjuk, hogy legfeljebb $p - 1$ kocka maradt.

Tegyük fel ellenkezőleg, hogy legalább p kocka megmaradt. Ekkor ha gondolatban összetolnánk a sorból megmaradt kockákat, a lemma alapján találhatnánk benne még egy összefüggő részt, melyben p -vel osztható számú mogyoró van. Szórjunk piros reszeléket ezekre a mezőkre, melyek a valóságban nem biztos, hogy összefüggenek: néhány üres helyet közrefoghatnak. A közrefogott helyeken lévő csokikat Albrechtke bizonyos korábbi napokon elfogyasztotta (és világos, hogy az ilyen napokon csak közrefogott csokikat evett).

Így Albrechtke stratégiáját megváltoztathatjuk a következő módon: az olyan napi adagokat eltöröljük, melyek közrefogott csokiból állnak; és ehelyett a legvégén Albrechtke megeszi a piros csokikat az összes közrefogottal együtt egyszerre, melyet megethet, hiszen azok összefüggenek.

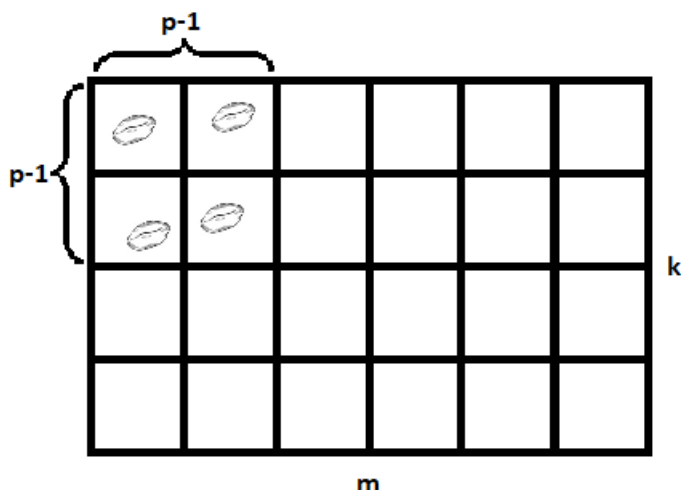


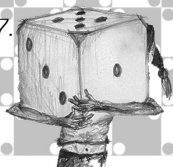
Így találtunk egy olyan stratégiát, amivel az eredetnél több csoki megehető. Ellentmondásra jutottunk, vagyis Albrechtke a legügyesebb stratégiával legfeljebb $p - 1$ darabot hagy meg a sorban.

Most vegyünk egy k sorból és m oszlopból álló csokit. Képzeletben egyesítsük a sorokon belül a kockákat, így egy $1 \times k$ darabból álló csokit kapunk. Ebből az előző állítás szerint megehetőnk csokikat úgy, hogy legfeljebb $p - 1$ sor maradjon meg. Majd az egyesítést feloldjuk, és a maradék legfeljebb $p - 1$ sorban külön-külön alkalmazzuk az előző állítást, azaz ezekben a sorokban meghagyhatunk maximum $p - 1$ darab kockát.

Összesen így legfeljebb $(p - 1)^2$ kocka marad meg.

Most megmutatjuk, hogy a legrosszabb esetben meg is marad ennyi. Vegyük az alábbi konstrukciót: a tábla bal felső sarkában egy $(p - 1) \times (p - 1)$ -es négyzetben legyenek csupa 1 mogyorós kockák, az összes többi kockában pedig 0 mogyoró legyen. Ekkor ebből a négyzetből akárhogy kivágva egy $a \times b$ méretű téglalapot, benne a mogyorók száma, ab nem lesz osztható p -vel, mivel p prím, és p nem osztja sem a -t, sem b -t (mivel a -nak és b -nek 0 és $p - 1$ közé kell esnie). Ha a megevendő téglalapunkat 0 mogyorós kockákkal bővítenénk, azzal sem tudnánk a helyzeten segíteni (nem változna a p -s maradék). A $(p - 1)^2$ db 1-es négyzet így mindenképp megmarad. (Ez a konstrukció mind a D, mind a D+ kategóriában elfér a megadott táblán.)

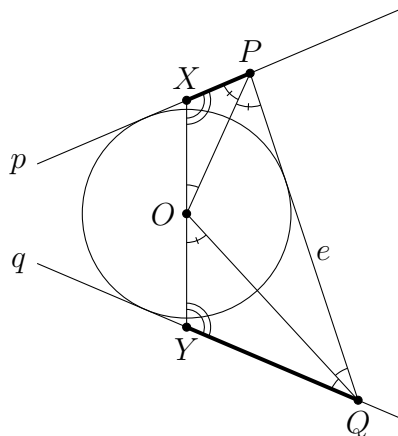




13. (D+4.) Az ABC háromszög beírt körének középpontja I . Legyen e az I -n átmenő CI -re merőleges egyenes. Az e egyenes messe az AC oldalt A' , a BC oldalt B' pontban. Legyen A'' az A pont tükörképe A' -re, B'' pedig a B pont tükörképe a B' -re. Bizonyítsátok be, hogy az $A''B''$ egyenes érinti a beírt kört.

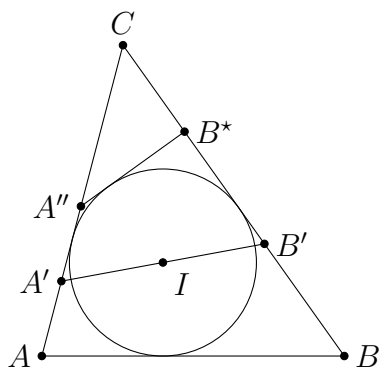
Megoldás:

Lemma. Legyen adott a k kör és az X, Y a körön kívüli pontok úgy, hogy az XY szakasz felezőpontja a k középpontja. Húzzuk meg X -ből a p , és Y -ből a q nem párhuzamos érintőket k -hoz. Legyen a k kör egy tetszőleges e érintőjének metszéspontja a p, q egyenesekkel P és Q . Ekkor az XP és YQ szakaszok előjeles hosszának szorzata állandó, bármely e érintőt is vettük.

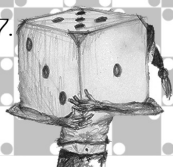


Bizonyítás. Legyen O a k kör középpontja. Mivel $XO = YO$, az X, Y -beli érintők ugyanakkora szöveget zárnak be az XY egyenessel, $OXP \sphericalangle = QYO \sphericalangle = \alpha$. A P -ből k -hoz húzott két érintő p és e , így $XPO \sphericalangle = OPQ \sphericalangle = \beta$. Ugyanígy $PQO \sphericalangle = OQY \sphericalangle = \gamma$. Az $XPQY$ négyszög belső szögeinek összege $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, így $POX \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma$, és $YOQ \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$. Tehát az XPO és YOQ háromszögek hasonlóak, így $XP/XO = YO/YQ$, azaz $XP \cdot YQ = XO \cdot YO$, ami valóban állandó.

Ha P megegyezik az X ponttal, akkor e párhuzamos q -val (ami egy $0 \cdot \infty$ típusú szorzatnak felel meg). Meggondolható ez alapján, hogy ha P a p egyenesen az X másik oldalán helyezkedik el, akkor Q is Y -nak a másik oldalán van, ezért az előző gondolatmenet ugyanúgy működik. Tehát az XP, YQ előjeles szorzata állandó. \square



Tekintsük most a feladatbeli ABC háromszög beírt körét, és az A', B' pontokat, melyek felezőpontja I , hiszen az $A'CI$ és $B'CI$ háromszögek egybevágóak. Húzzuk meg A'' -ből az AC -től különböző érintőt a beírt körhöz, legyen ennek metszéspontja a BC egyenessel B^* . Ekkor a lemma szerint $A'A \cdot B'B = A'A'' \cdot B'B^*$. Mivel $A'A'' = -A'A$, ezért $B'B^* = -B'B = B'B''$, tehát $B^* = B''$, és ezt kellett bizonyítani.



14. (D+5.) a) A tér minden pontját kiszíneztük pirosra, sárgára vagy kékre. Mutassátok meg, hogy az alábbi három közül legalább az egyik típusú ponthalmaz létrejön:

- két kék pont egymástól 1 távolságra;
- két piros pont egymástól 1 távolságra;
- három sárga pont egymástól páronként 1, 1 és 2 távolságra.

b) Mutassátok meg, hogy a sík pontjai kiszínezhethők három színnel úgy, hogy ne legyen 3 olyan egyszínű pont, melyek egymástól páronként 1, 1 és 2 távolságra vannak.

Megoldás:

Definiáljuk az l_i^t jelölést. Ez jelentsen i darab pontot egy egyenesen, ahol a szomszédosak távolsága t (t alap esetben 1, ha nem írunk a helyére semmit).

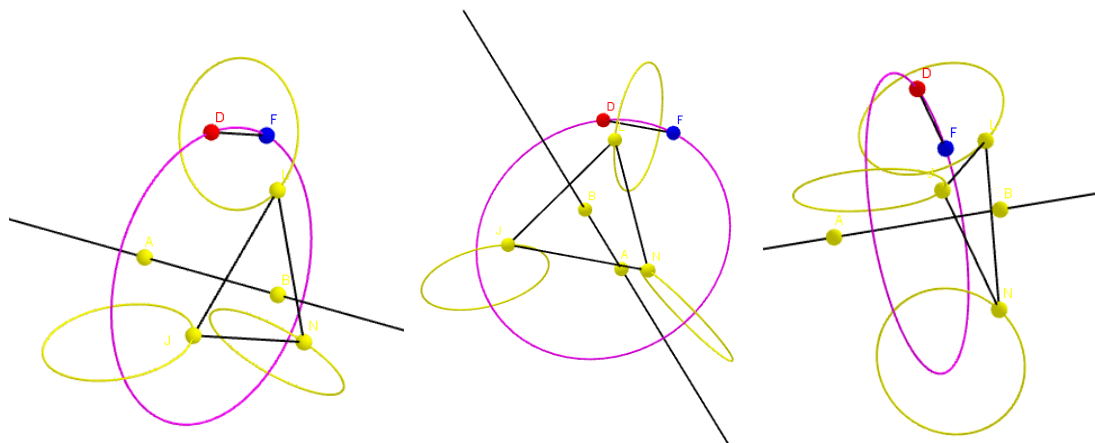
a) Látszólag messziről indulva először egy segédítéletet látunk be:

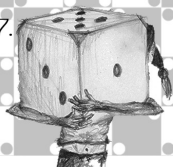
Lemma. *A háromdimenziós teret háromszínezve vagy lesz sárga 2 egység oldalú szabályos háromszög, vagy lesz piros l_2 , vagy lesz kék l_2 .*

Bizonyítás. Ehhez először lássuk be azt az egyszerű kis állítást, hogy a teret akárhogyan is próbálom három színnel kiszínezni, biztosan lesz sárga l_2^2 , ha nincs piros és kék l_2 , vagyis lesz két sárga pont egymástól 2 egység távolságra.

Ez szinte trivialis, hiszen kell lennie sárga pontnak (különben lenne piros l_2 , vagy kék l_2 , véve egy egységoldalú szabályos háromszöget és skatulya-elv), és a körülötte lévő 2 egység sugarú gömb olyan, hogy nem lehet 2 színezni piros és kék l_2 mentesen, azaz van még rajta sárga pont (van a felületén egy szabályos egységoldalú háromszög és megint skatulya-elv). Ezek ketten egy sárga l_2^2 . Ezen pontok legyenek A és B .

Azon pontok halmaza, amelyek A -t és B -t egy szabályos háromszöggé egészítik ki, egy olyan kör, melynek középpontja AB felezőpontja, tengelye AB és sugara $\sqrt{3}$. Ezen kör minden pontja vagy piros, vagy kék, ám az egység távol lévő pontok különböző színűek. Ilyenkor azt mondjuk, hogy ez a kör 1-alternáló (piros-kék kör). Nyilvánvaló, hogy véve az összes egység távolságú pontpárt az előző 1-alternáló körön, ezek egyik pontja piros, másik kék. Őket egy $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sugarú körön elhelyezkedő pontok egészítik egységoldalú háromszöggé, mely körnek a középpontja az egységszakasz felezőpontja és a kör merőleges az egységszakaszra; és mivel nincs se piros, se kék l_2 , így ezen körök sárgák, tehát együtt egy sárga tóruszt alkotnak.

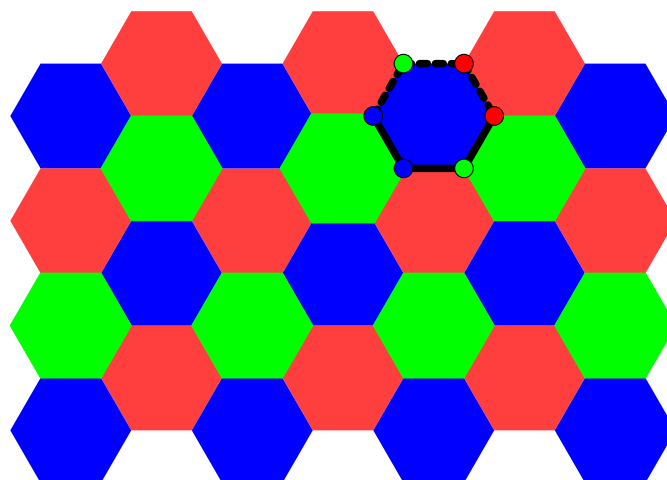




A tórusz belső átmérője könnyen becsülhetően kisebb, mint 1, míg a külső nagyobb, mint $\sqrt{3}$ (hiszen ekkora volt az AB szakasz „körüli” kör sugara is), így ezen a tóruszon van sárga 2 oldalú szabályos háromszög, mivel AB -re merőleges párhuzamos síkokkal metszve a tórusznak olyan 3 körét, amelyek AB -re nézve 120° -os elforgatottjai egymásnak, lesz olyan AB -re merőleges sík, amely ezen körökből két egység oldalú szabályos háromszöget metsz ki (folytonosságra hivatkozva). \square

A feladat bizonyításához tegyük fel, hogy nincs piros és kék egységszakasz, ekkor az előző lemma alapján létezik egy sárga két egység oldalú háromszög. Vegyük az oldalfelező pontokat. Ezek egy szabályos háromszöget alkotnak. Evidens, hogy ezen csúcsok között nem lehet sem 2 piros, sem 2 kék, mert azok l_2 -t alkotnának, ami tiltott. Viszont három pont van, így legalább az egyik oldalfelező pont sárga, és az oldal két sárga végpontjával együtt ez egy sárga l_3 -at alkot.

b) Most legyen a három szín piros, kék és zöld. Ekkor vegyük a sík egységoldalú hatszögrácsát. Ekkor ha az egyik hatszög piros, akkor a szomszédjai sorra kék-zöldek, és megfelelően permutálva, ahol egy hatszöghöz hozzátartozik a vízszintes átmérőjük alatti határpontok, kivéve a „jobb legalsót”, és a vízszintes átmérőjük jobb pontját. Ezen színezés nyilván nem tartalmaz monokromatikus l_3 -at, mivel egy hatszögon belül nincs, és nem tud „átugrani” szomszédos hatszöget egyik l_3 sem.



1. ábra. A hatszögrács szerinti színezés