Helyi forduló
2017. november 17.

XI. Dürer Verseny
Matematika feladatsor
11-12. osztályosok

D kategória

1. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat. Egy lépésben két számot letörlünk, és felírjuk helyettük az összegüket és a szorzatukat. (Így minden lépés után pontosan öt szám lesz a táblán.) El lehet-e érni néhány ilyen lépéssel, hogy a táblán
a) szerepeljen a 100-as szám?
b) legyen 3 darab 12-es?
c) legyen 4 darab 33-as?
d) éppen a $26, 32, 41, 44, 52$ számok szerepeljenek?

2. Egy egyenlő szárú háromszögben berajzoltuk az egyik szögfelezőt. Az így kapott két kisebb háromszög közül legalább az egyik hasonló az eredetihez. Mekkora lehet az eredeti háromszög szára, ha alapjának hossza 1 egység?

3. a) Egy társaság biciklitúrát tervez Budapestről Miskolcra. A 200 km hosszú út mentén ismernek néhány házat, ahol megpihenhetnek éjszakára. Tudjuk, hogy az úton (a kezdő- és a végpontot is beleértve) bármely két szomszédos ház távolsága legfeljebb 100 km. Megtehetik-e biztosan az utat 3 nap alatt, ha semelyik nap sem szeretnének 100 km-nél többet tekerni?
b) Hazafelé egy 300 km hosszú úton terveznek jönni, melyen szintén igaz, hogy bármely két szomszédos ház távolsága legfeljebb 100 km, a kezdő- és a végpontot is beleértve. Megtehetik-e biztosan a visszautat 4 nap alatt, ha semelyik nap sem szeretnének 100 km-nél többet tekerni?

4. A különböző pozitív egészekből álló (p, q, r) számhármast *illusztris*nak nevezzük, ha $p \mid q+r$, $q \mid r+2p$, és $r \mid p+3q$ is teljesül. Keressétek meg az összes illusztris (p, q, r) számhármast, ahol p, q és r is prímszám.
Megjegyzés: $x \mid y$ *azt jelenti, hogy* x *osztója* y*-nak, azaz létezik olyan* z *egész szám, melyre* $x \cdot z = y$.

5. a) Albrechtke kapott egy tábla mogyorós csokit, mely 4×6 „kockából" áll. A mogyorószemek sehol sem esnek a kockák határvonalaira. Minden nap megeszik belőle néhány kocka csokit, betartva a következő szabályokat:

(i) az egy napon megevett kockáknak hiánytalan téglalapot kell alkotniuk;
(ii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma páros.

Az el nem fogyasztott kockákat nem mozgatja; így a megmaradó csokoládé akár több különálló részből is állhat. Mutassátok meg, hogy ha Albrechtke ügyesen választja ki az egyes napokon megevendő részeket, akkor elérheti, hogy végül legfeljebb egy kocka csoki maradjon.
b) A következő tábla ugyanilyen csokinál Albrechtke a (ii)-es szabályt lecseréli a következő (iii)-as szabályra:

(iii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma 3-mal osztható.

Legrosszabb esetben hány kocka fog megmaradni, ha Albrechtke a lehető legügyesebben eszi a csokit az (i)-es és (iii)-as szabályok együttes betartásával?

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XI. Dürer Verseny szervezői