Helyi forduló
2017. november 17.

XI. Dürer Verseny
Matematika feladatsor

11-12. osztályosok

D+ kategória

---

1. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat. Egy lépésben két számot letörlünk, és felírjuk helyettük az összegüket és a szorzatukat. (Így minden lépés után pontosan öt szám lesz a táblán.) Legfeljebb hány 35-ös állhat egyszerre a táblán néhány ilyen lépés után?

2. A különböző pozitív egészekből álló (p, q, r) számhármast *illusztris*nak nevezzük, ha $p \mid q+r$, $q \mid r+2p$, és $r \mid p+3q$ is teljesül. Keressétek meg az összes illusztris (p, q, r) számhármast, ahol p, q és r is prímszám.
Megjegyzés: $x \mid y$ azt jelenti, hogy x osztója y-nak, azaz létezik olyan z egész szám, melyre $x \cdot z = y$.

3. a) Albrechtke kapott egy tábla mogyorós csokit, mely 100×100 „kockából” áll. A mogyorószemek sehol sem esnek a kockák határvonalaira. Minden nap megeszik belőle néhány kocka csokit, betartva a következő szabályokat:

(i) az egy napon megevett kockáknak hiánytalan téglalapot kell alkotniuk;
(ii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma páros.

Az el nem fogyasztott kockákat nem mozgatja; így a megmaradó csokoládé akár több különálló részből is állhat. Mutassátok meg, hogy ha Albrechtke ügyesen választja ki az egyes napokon megevendő részeket, akkor elérheti, hogy végül legfeljebb egy kocka csoki maradjon.
b) A következő tábla ugyanilyen csokinál Albrechtke a (ii)-es szabályt lecseréli a következő (iii)-as szabályra:

(iii) az egy napon megevett részben a mogyorószemek száma 13-mal osztható.

Legrosszabb esetben hány kocka fog megmaradni, ha Albrechtke a lehető legügyesebben eszi a csokit az (i)-es és (iii)-as szabályok együttes betartásával?

4. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I. Legyen e az I-n átmenő CI-re merőleges egyenes. Az e egyenes messe az AC oldalt A', a BC oldalt B' pontban. Legyen A'' az A pont tükörképe A'-re, B'' pedig a B pont tükörképe a B'-re. Bizonyítsátok be, hogy az $A''B''$ egyenes érinti a beírt kört.

5. a) A tér minden pontját kiszíneztük pirosra, sárgára vagy kékre. Mutassátok meg, hogy az alábbi három közül legalább az egyik típusú ponthalmaz létrejön:

- két kék pont egymástól 1 távolságra;
- két piros pont egymástól 1 távolságra;
- három sárga pont egymástól páronként 1, 1 és 2 távolságra.

b) Mutassátok meg, hogy a sík pontjai kiszínezhetők három színnel úgy, hogy ne legyen 3 olyan egyszínű pont, melyek egymástól páronként 1, 1 és 2 távolságra vannak.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XI. Dürer Verseny szervezői