I. Dürer Matematikaverseny, 2007 – 2008
C kategória, Váltó

1. Válasszunk úgy egy pozitív k számot, hogy minden pozitív x, y-ra teljesüljön a következő egyenlőtlenség!

$$2x^2 + 18y^2 \geq kxy$$

Legfeljebb mekkora lehet k?

2. Egy 10×10-es táblára babszemeket teszünk le. Ha olyan mezőre tettünk babot, mellyel szomszédos mezőn már van bab, akkor levesszük az egyik szomszédos babot. Ezt a lépését ismételve legfeljebb hány bab lehet a táblán?

3. 99^{99} számjegyeinek összege B. B számjegyeinek összege C. Mennyi C számjegyeinek összege?

4. Egy osztályban 6 tárgyat tanítanak. Félévkor mindenki pontosan ugyanannyi tárgyból volt ötös, de nem volt két olyan diák, akiknél az ötössel teljesített tárgyak megegyeztek volna. Legfeljebb hányan járhatnak az osztályba?

5. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex nyolcszög átlóinak a sokszög belsejében?

6. Egy trapézt az átlói 4 háromszögre osztanak fel. Tudjuk, hogy két szemközti háromszög területe 1, illetve 25 egység. Hány egység a trapéz területe?

7. Jelölje B azt a számot, ahányféleképpen 127 elemből ki tudunk választani 63-at. Hány 0-ra végződik B?

8. Adott egy körön hat pont. Behúztuk az általuk meghatározott összes húr. Legfeljebb hány síkrész keletkezett a kör belsejében?

9. $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots 12\}$. Hány részhalmaza van A-nak, ahol az elemek szorzata osztható 6-tal?

10. $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots 2008\}$. Tudjuk, hogy az A halmazból bárhogyan választunk ki x elemet, mindig létezik két szám, amelynek különbsége 4. Mennyi x minimális értéke?

11. Hányféleképpen áll elő az 1155 két négyzetszám különbségeként?

12. Egy sakktábla széttört, csak a főátlóján lévő mezők, és a velük szomszédosak maradtak meg. Hányféleképpen lehet eljutni az egyik sarokból a másikba?

13.

$$11 \cdot 101 \cdot 10001 \cdot (10^8 + 1) \cdot \ldots \cdot (10^{32} + 1) = ?$$