



I. Dürer Matematikaverseny, 2007 – 2008  
D kategória, Kifejtős forduló



1. Adott egy négyzetrács, ahol két szomszédos rácspont távolsága 1. Lehet-e két rácspont távolsága  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$ , illetve  $\sqrt{2007}$ ?

2. Igazoljuk, hogy minden  $x, y, z$  valós számra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{4} \geq x + y + z.$$

3. Adott az  $ABC$  szabályos háromszög. Rajzoljuk meg a köré írható körét! Bizonyítsuk be, hogy az  $AC$  ív tetszőleges  $P$  pontjára igaz, hogy  $PB = PA + PC$ !

4. Az  $f$  függvényre igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x, \\ f(x+y) &\leq f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy csak az  $f(x) = x$  függvény teljesíti az egyenlőtlenségeket!

5. Feldarabolható-e egy egységkocka véges sok, különböző nagyságú kisebb kockára (vagyis a kisebb kockákból összerakható-e egy nagyobb kocka)?

**Játék.** Egy adott számtól kezdődik a játék, ebből a játékosok felváltva vonnak le egy tetszőleges prímszámot. Az nyer, aki a nullát mondja!