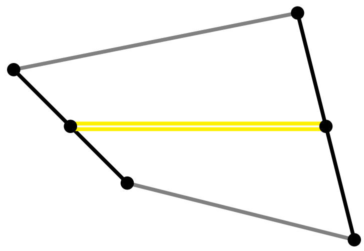
II. Dürer Matematikaverseny, 2008 – 2009
C kategória, Kifejtős forduló

1. A középkor nagy fejszámolóművésze, Számí Tódor, kiskorától kezdve a következő számítást végezte. Első reggel gondolt egy számra, majd minden további reggel kivont belőle egyet. A probléma csak az volt, hogy Tódor komoly gondban volt az előjelekkel. Bár hatalmas fejszámolóművész volt, tudta őket kezelni, de minden éjszaka elfelejtette minden általa megjegyzett szám előjelét (azaz minden reggel egy nemnegatív számra emlékezett). Végül a 10. nap délután megunta a számítást. Az eredményt feljegyezte egy lapra, hogy megmaradjon az utókornak. A lapon ez állt: $\frac{1}{2}$. Milyen számra gondolhatott Tódor?

2. Tor Zita új báli fűzőjének anyaga négyszög alakú. Négy díszcsíkot kell rávarrnia a szabónak. Kettőt aranyból, kettőt ezüstből. Két ugyanolyan színűt két átellenes oldalra, másik kettőt pedig az őket nem metsző középvonalra. A szabó még nem ismeri a ruha végleges alakját. Azonban mindenképpen úgy fogja varrni a ruhát, hogy a legolcsóbb legyen (azaz az arany csík rövidebb legyen, mint az ezüst). A tervezéshez fontos lenne tudnia, hogy milyen színű csík kerül középre. El tudja-e ezt dönteni anélkül, hogy ismerné a ruha pontos alakját?



3. Dürer $n \times m$ méteres téglalap alakú kertje sebészi pontossággal $n \times m$ egységnégyzetre van bontva, és valamelyik négyzet közepére Dürer elültette kedvenc petúniáját. Dürer kertésze egy vakonddal küzd, próbálja elűzni a pompás kertből, így föld alatt húzódó falat épít a kert határára. A gond csak az, hogy a vakond a falon belül maradt... Minden fallal való találkozásakor "visszatükröződik", azaz a fallal ugyanolyan szöget bezárva halad tovább.

A vakond a petúnia alól a falakkal $45°$-os szöget bezárva indul. Lehetséges-e az, hogy áthaladjon a petúnia alatt az eredeti irányra merőleges irányban?

4. Adott 60 egész szám úgy, hogy bármely 4 különböző, megfelelő sorrendben egy számtani sorozat 4 egymást követő tagja. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 15 egyenlő.

5. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőtlenség teljesül minden pozitív számra:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3^2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

Játék. Ketten felváltva vesznek el egy kupac kavicsból legalább egy kavicsot. A kezdő első lépésben legfeljebb a kezdeti kavicsok felét veheti el. Ezután mindkét játékos maximum annyit vehet el, mint amennyit a másik vett el legutóbb. Az nyer, aki az utolsó kavicso(ka)t veszi el.