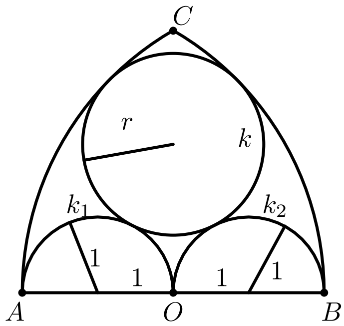
III. Dürer Matematikaverseny, 2009 – 2010
C kategória, Kifejtős forduló

1. Dürer művészettörténetet magyaráz a tanítványainak. Az alábbi gótikus ablakot vizsgálják. Ahol a BC körív középpontja A, és hasonlóan az AC körív középpontja B. Kérdés, hogy mennyi a kör sugara (az ábrán r-rel jelölt sugár).



2. Igazoljuk az alábbi állítást (m, n pozitív egészek):

$$mn \mid m^2 + n^2 \quad \Longrightarrow \quad m = n$$

3. Egy táblázatban, amelynek 3 sora és n oszlopa van, véletlenszerűen elhelyeztünk n fehér, n piros és n fekete korongot. Soron belül a korongokat átrendezhetjük. Igazoljuk, hogy ekkor mindig elérhető, hogy minden oszlopban 3 különböző színű korong legyen.

4. Egy könyvtárban két tábla van, az egyikre mindenki felírja, hogy érkezésekor, rajta kívül hány ember volt a könyvtárban, a másikra azt írják, hogy távozásuk után hány vendég maradt a könyvtárban (a vendégek egyesével jönnek-mennek). Igazold, hogy egy nap, nyitástól-zárásig a 2 táblára ugyanazok a számok (és ugyanannyiszor) kerülnek fel (nem feltétlenül azonos sorrendben)!

5. Legyen ABC háromszög beírt körének érintési pontja AB oldallal D. Állítsunk A-ból egy-egy merőlegest a B, illetve C csúcsból induló belső szögfelezőre. Ezek talppontjai legyenek rendre: A_1 és A_2. Igazoljuk, hogy $A_1A_2 = AD$

Játék. Legyen $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ egy polinom. Két játékos felváltva határozza meg a, b, c értékeit. Tetszőleges sorrendben választanak a, b, c értékeinek egész számokat. A játékos célja, hogy a polinomnak mindhárom gyöke egész legyen. B célja, hogy ezt megakadályozza. (A kezdi a játékot).