Figyelem a feladatok helyenként sok mesét tartalmazhatnak!
A feladatok megoldhatók a középiskolás mechanika és a Coulomb-erő ismeretével!

1. Fázistér

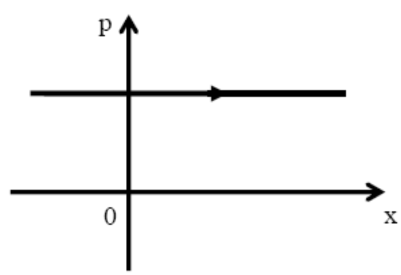
A fázistér fogalma

A fejezetben pont szerű testek egy dimenziós klasszikus, Newtoni mozgását vizsgáljuk.

Egy pontszerű test mozgását különböző módokon írhatjuk le, szemléltethetjük. A legegyszerűbb mód, ha megadjuk (lerajzoljuk) a részecske helykoodinátáit az idő függvényében. Egyszerű esetektől eltekintve (pl. egyenletes mozgás, körmozgás, harmonikus rezgőmozgás) azonban ezt technikailag nehéz megtenni.

Ebben a feladatban a mozgás egy másik leírásával ismerkedünk meg. Itt a részecske p impulzusát adjuk meg a hely függvényében (ahol $p = m \cdot v$). Azt a koordinátarendszert, aminek tengelyeit a test koordinátái és impulzuskoordinátái alkotják fázistérnek nevezzük. A fázistér minden pontja a rendszer egy állapotának felelnek meg. Mozgás közben a részecske a fázistérben leír egy görbét, amit fázisgörbének nevezünk

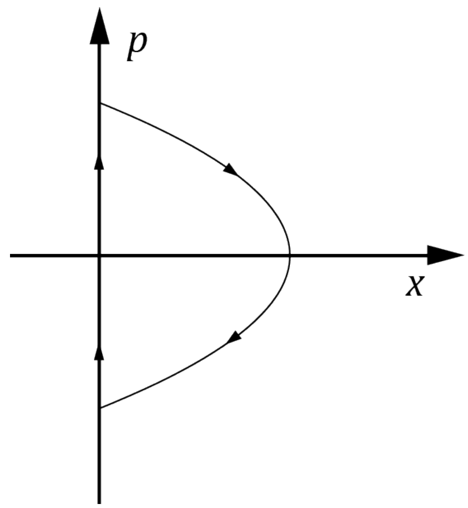
Pl. egydimenzióban egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test fázisgörbéje a 1. ábrán látható. A nyíl jelzi az idő növekedtével merre halad a részecske a görbén.



1. ábra. Egyenletes mozgást végző test fázisgörbéje.

Vegyünk észre egyszerű tulajdonságokat a fázistéren! A felső félsíkban (I. és IV. síknegyed) a nyíl csak jobbra mutathat, hiszen itt az impulzus (így a sebesség is) pozitív, így a hely koordinátának nőnie kell. Hasonlóan az alsó félsíkban (II. és III. síknegyed) a nyilak csak balra mutathatnak.

Határozzuk meg egy függőlegesen feldobott pattogó labda fázisgörbéjét! Kezdetben a labda teljes energiája (mozgási és helyzeti energia összesen) legyen E! Tudjuk, hogy a mozgás során az energia megmarad, azaz minden pillanatban $E = mgz + \frac{1}{2}mv_z^2$. Ebből fejezzük ki az impulzust (mv_z) a hely koordináta függvényében! $p_z = mv_z = \pm\sqrt{2m(E - mgz)}$. Ez egy parabola, melynek tengelye a koordináta tengely (lásd a 2. ábra). A felső része a felpattanás, az alsó a leesés.

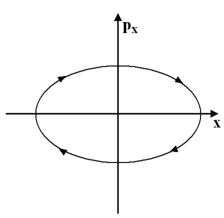


2. ábra. A függőleges hajítás fázisgörbéje.

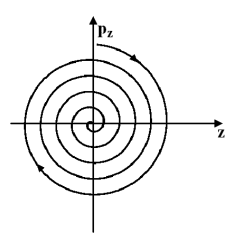
1/a Fázisdiagrammok

Az alábbi ábrákról határozzuk meg, hogy lehet-e egy tömegpont egydimenziós mozgásának fázisdiagramja! Ha nem lehet indokoljuk, hogy miért, ha lehet próbáljunk példát írni!

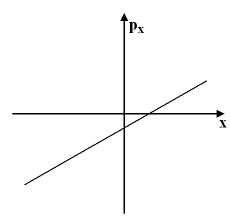
(5 pont)



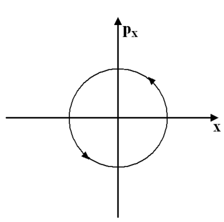
i



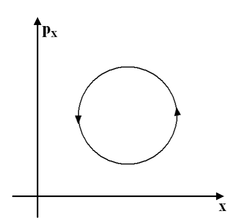
ii



iii



iv



v

1/b Az energia és a fázisgörbe

Mint mondhatunk a rendszer energiájáról egy záródó görbe esetén (pl. i)? És egy az origóba tartó görbe esetén (pl. ii)?

(5 pont)

1/c Flipper

Egy golyó pattog az x koordináta mentén két fal között. A falak az $x = -L/2$, $x = L/2$ helyen vannak. Rajzoljuk le a golyó mozgását a fázistérben!

(5 pont)

1/d Rezgőmozgás

Egy m tömegű test k direkciós állandójú rúgóhoz van erősítve. A fázistérben $(p-x)$ milyen görbét ír le a mozgása és mik a görbe jellemző adatai? Segítség: írjuk fel a részecske E összenergiáját és használjuk ki, hogy ez a mozgás során állandó.

(5 pont)

2. Protonok ütközése

A részecskefizikusok gyakran szórakoznak azzal, hogy protonokat nagy sebességre felgyorsítanak, majd a szemben haladó, v és $-v$ sebességű nyalábokat egymásnak ütköztetik. Ha a két proton az ütközés során olyan közel kerül egymáshoz, hogy belső szerkezetük jelentős tényezővé válik, akkor az ütközés során mindenféle érdekes dolgok történhetnek. Ennek azonban előfeltétele, hogy a Coulomb-taszítást legyőzve a két proton tényleg elég közel kerülhessen egymáshoz.

2/a

Mekkora v sebességet kell adnunk a protonoknak ahhoz, hogy $r = 15\,fm$ távolságra megközelítsék egymást a Coulomb-taszítás ellenében? (Segítség: v a fénysebességnél jóval kisebbnek fog adódni, ezért nyugodtan használhatjátok a newtoni mechanika klasszikus képleteit.)

(5 pont)

Ilyen kicsi, az atommagok méretével összemérhető távolságskálán azonban a Coulomb-taszítás mellett egy vonzó kölcsönhatás is hatni fog a protonok között. Ezt a vonzó kölcsönhatást magerőnek nevezzük: ő felelős az atommagok egyben tartásáért. A két nukleon között ható magerőhöz tartozó potenciális energiát a Yukawa-formula adja meg:

$$V_{Yukawa} = -\frac{g^2}{4\,\pi}\,\frac{e^{-r/l}}{r}\,. \tag{1}$$

A képletben g az erős kölcsönhatás csatolási állandója. Ha a Coulomb-kölcsönhatáshoz hasonlítjuk, akkor ez az e elemi töltés megfelelője a magerőnél. A mínusz előjel mutatja, hogy a magerő vonzó kölcsönhatás. Az igazi újdonság a képletben az exponenciális faktor. A benne megjelenő l hosszúság dimenziójú paraméter a magerő hatótávolságának nagyságrendjét adja meg. Az $l << r$ határesetben az exponenciális tényező nagyon gyorsan tart a nullához, ezért lehet a magerőt nagyobb távolságokon elhanyagolni.

2/b

Ismételjük meg az előző feladat számolását úgy, hogy a Coulomb-taszítás mellett a Yukawa-kölcsönhatást is figyelembe vesszük. Mekkora értéket kapunk most v-re?

(5 pont)

2/c

Mekkora v értékre van szükség abban az esetben, ha az egyik proton áll és a másikat nekilőjük?

(5 pont)

Adatok: $g^2 = 5,44 \cdot 10^{-9}\ J \cdot fm$ és $l = 1,46\,fm$.

3. A hidrogénszerű ionok Bohr-modellje

Ernest Rutherford híres 1909-es arany fóliás kísérlete óta tudjuk, hogy egy Z rendszámú elem atomja egy $Z \cdot e$ töltésű, nehéz és lényegében pontszerű atommagból, valamint a körülötte keringő Z darab $-e$ töltésű elektronból áll. Egy ilyen rendszer tárgyalása az elektronok közötti kölcsönhatás miatt már a klasszikus mechanika és elektrodinamika keretei között is nagyon bonyolult feladat. Jóval egyszerűbb problémát jelent az úgynevezett hidrogénszerű ionok leírása, amelyekben a Z rendszámú mag körül mindössze egyetlen elektron kering. Ebben a feladatban egy ilyen hidrogénszerű iont vizsgálunk és ráadásul azt is feltesszük, hogy a keringő elektron pályája kör alakú.

Ha az elektron sebessége a c fénysebességnél sokkal kisebb, akkor a klasszikus Newtoni mechanika ismert összefüggései szerint a $\mathbf{v}$ sebességgel keringő elektronhoz rendelhető impulzus és kinetikus energia nagysága:

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} \tag{2a}$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2m} \, . \tag{2b}$$

3/a

Írjuk fel a körpályán keringő elektron newtoni mozgásegyenletét! A mozgásegyenlet segítségével fejezzük ki az elektron teljes E energiáját a magtól való r távolság függvényében. Mutassuk meg, hogy az így kapott $E(r)$ függvény szigorúan monoton növő!

(5 pont)

Niels Bohr dán fizikus 1913-ban, a később róla elnevezett Bohr-modellben azt feltételezte, hogy az elektron a mag körül csak meghatározott sugarú pályákon keringhet. Ezen pályákra a következő feltétel teljesül. Az elektron impulzusmomentuma a $\hbar = h/2\pi$ természeti állandó egész számú többszöröse kell legyen:

$$L = r \cdot p = n \cdot \hbar \, , \tag{3}$$

ahol az $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ számot főkvantumszámnak nevezzük. Az $n = 1$-el indexelt körpályát alapállapotnak, az összes többi pályát pedig gerjesztett állapotnak nevezzük.

3/b

Az 3/a rész eredményei és a (3) feltétel segítségével határozzuk meg az n-el indexelt körpályához tartozó r_n pályasugár és E_n összenergia értékét. Mit kapunk a $Z = 79$-es rendszámú arany atommag körül alapállapoti körpályán keringő elektron pályasugarára és összenergiájára?

(5 pont)

3/c

Mutassuk meg, hogy az n indexű körpályán keringő elektron sebessége

$$v = \frac{\alpha \cdot Z}{n} \cdot c \, , \tag{4}$$

ahol α a finomszerkezeti állandó.

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{e^2}{\hbar \cdot c} \approx \frac{1}{137} \tag{5}$$

(5 pont)

A feladatsor megoldására 2 óra 30 perc áll rendelkezéstekre. Használható segédeszközök: író, szerkesztő eszközök, számológép, függvénytábla.

Miskolc, 2010.02.11.

Jó munkát kívánunk!
a szervezők

Extra kérdések

1/e Bohr-Sommerfeld kvantálás

Bohr a 20. század elején az atomfizikai kísérleteken töprengve arra jutott, hogy a részecskék nem mozoghatnak tetszőleges pályán. A természetben megvalósuló pályákat az a feltétel határozza meg, hogy egy periódikus mozgás során a fázistérben a fázisgörbe által körülölelt terület $n \cdot h$ lehet, ahol h az úgynevezett Planck-állandó, n pedig egy természetes szám. A 2. részben vizsgált rugómozgás esetén milyen E összenergiát vehet fel a test? Fejezzük ezt ki a mozgás $f = 1/T$ frekvenciájával!

(2 pont)

1/f Inga

Itt ismét visszatérünk a klasszikus mechanikához. Egy $L = 1m$ hosszúságú tömeg nélküli rúdon egy $m = 1kg$ tömegű test helyezkedik. g-t vegyük $10m/s^2$-nek. A rúd egyik vége körül függőleges síkban szabadon foroghat. Módosítsuk a fázistér fogalmát kissé úgy, hogy a vízszintes tengelyre a rúd függőlegestől bezárt szöge kerüljön. A másik tengely pedig legyen a rúd szögsebessége. Rajzoljuk le a rendszer fázisgörbéjét három különböző E összenergia mellett. (Itt a rajzolást csak nagyjából kell érteni, a görbék egyenletét nem kell megadni.) E-t válasszuk $5J$, $20J$, $30J$-nak. A helyzeti energia nullpontja a test legalacsonyabb helyzete.

(2 pont)

3. A hidrogénszerű ionok Bohr-modellje (folyt.)

A (4) formulából jól látható, hogy amennyiben Z a 137-el egy nagyságrendbe esik, akkor az alapállapoti körpályán keringő elektron sebessége a fénysebeséggel összemérhetővé válik. Mivel a Newtoni-mechanika formulái csak a fénysebességnél jóval kisebb sebességek világában érvényesek, ezért nagy rendszámú atommagok esetében a Bohr-modell módosításra szorul. Ehhez a huszadik századi fizika másik nagy elméletének, a speciális relativitáselméletnek a korrekcióit kell figyelembe vennünk. Eszerint a $\mathbf{v}$ sebességű elektron impulzusát és kinetikus energiáját (2) helyett a

$$\mathbf{p} = \frac{m \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6a}$$

$$K = m \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \sqrt{m^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} - m \cdot c^2 \tag{6b}$$

képletek adják meg. (6)-tal összhangban a mozgásegyenlet is módosításra szorul:
az $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ formula érvényét veszti és helyette az erő általános

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \tag{7}$$

definícióját kell használnunk.

3/d

Mutassuk meg a (7) egyenlet és egy ábra alapján, hogy a körpályán keringő elektron relativisztikus mozgásegyenlete

$$p \cdot \omega = F_{cp} \ , \tag{8}$$

ahol ω a szögsebesség és F_{cp} a centripetális erő nagysága.

(2 pont)

3/e

A (8) mozgásegyenlet és a (3) kvantálási feltétel alapján igazoljuk, hogy a keringési sebeséget megadó (4) formula a relativisztikus sebességtartományban is érvényben marad.

(2 pont)

3/f

Számoljuk ki az E_n energiaszinteket és az r_n pályasugarakat újra, a relativisztikus korrekciók figyelembevételével. Mit kapunk most a $Z = 79$-es rendszámú arany atommag körül alapállapoti körpályán keringő elektron pályasugarára és összenergiájára?

(2 pont)

Megjegyzés: Azért az aranyat választottuk numerikus példaként, mert annak sárga színe csak a relativisztikus effektusok pontos figyelembevételével magyarázható. Ez tehát a relativitáselmélet egy köznapi, bár kevésbé közismert bizonyítéka.

A feladatsor megoldására 2 óra 30 perc áll rendelkezéstekre. Használható segédeszközök: író, szerkesztő eszközök, számológép, függvénytábla.

Miskolc, 2010.02.11.

Jó munkát kívánunk!
a szervezők