IV. Dürer Matematikaverseny, 2010 – 2011
C kategória, Kifejtős forduló

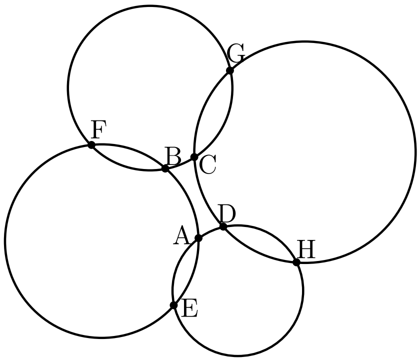
1. Legyenek a, b és c egynél nagyobb, természetes számok. Azt szeretnénk, hogy az alábbi oszhatóságok mindegyike, egyszerre teljesüljön.

$$b \mid a^2 - 1, \quad c \mid a^2 - 1, \quad a \mid b^2 - 1, \quad c \mid b^2 - 1, \quad b \mid a^2 - 1, \quad c \mid a^2 - 1.$$

Igazoljuk azt, hogy ez lehetetlen!

2. Egy szabályos sokszöget átlói segítségével háromszögekre osztottunk (a háromszögek csúcsai a sokszög csúcsai közül valók). Igazoljuk, hogy a háromszögek között van egyenlőszárú!

3. Adott a síkon négy kör, melyek az ábrán látható módon páronként metszik egymást. A „belső” metszéspontok az A, B, C és D, míg a „külső” metszéspontok az E, F, G és a H. Lássuk be, hogy az $ABCD$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha az $EFGH$ négyszög is az.

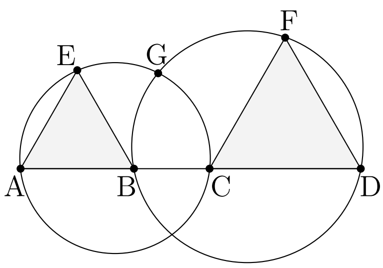


4. Egy 8×8-as sakktáblán bábuk állnak. Figurákkal úgy tudunk mozogni, hogy egy másik figurát vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan átugorva üres mezőre érkezünk.

a) A bal alsó 3×3-as sarkában 9 bábu áll. El lehet-e juttatni ezt a 9 bábut a bal felső 3×3-as sarokba?

b) El lehet-e juttatni ugyanezt a 9 bábut a jobb felső 3×3-as sarokba?

5. Adott egy egyenesen sorban A, B, C és D pont. Állítsunk AB-re illetve CD-re, mint oldalra szabályos háromszögeket (ugyanabban a félsíkban). Legyen a két háromszög harmadik csúcsa E illetve F. AEC háromszög és BFD háromszög körülírt körei G-ben metszik egymást (G a háromszögek félsíkjában van). Igazoljuk, hogy AGD szög $120°$.



Játék. Ebben a játékban, ketten játszanak a vonal-, illetve a körjátékos. A vonaljátékos a mellékelt táblán minden lépésében besatírozza egy kis háromszög egyik oldalát, a körjátékos pedig kört tesz egy kis háromszög belsejébe. A játékot a vonaljátékos kezdi. A vonaljátékos akkor nyer, ha sikerül egy olyan kis háromszöget létrehoznia, aminek mindhárom oldala satírozott, és nincs a belsejében kör. Ha ez a helyzet előáll, akkor a játék véget is ér. A körjátékos akkor nyer, ha minden háromszög belsejébe került már kör.