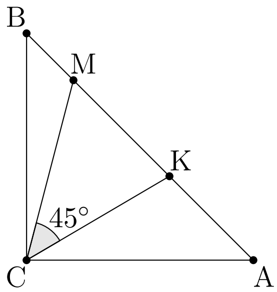
IV. Dürer Matematikaverseny, 2010 – 2011
D kategória, Kifejtős forduló

1. Meg lehet-e adni 5 egész számot úgy, hogy a belőlük képzett 10 darab kéttagú összeg éppen 10 egymást követő egész szám legyen?

2. Egy ABC egyenlőszárú derékszögű háromszögben az AB átfogón adott két pont, K illetve M úgy, hogy KCM szög 45° (K pont A és M között van). Igazoljuk, hogy ekkor

$$AK^2 + MB^2 = KM^2.$$



3. Egy matematikaversenyen 200-an vettek részt. 6 feladatot kellett megoldaniuk. Minden feladatot 120-an oldottak meg. Igazoljuk, hogy ekkor van 2 versenyző, akik együtt minden feladatot megoldottak.

4. Adott a térben legalább 4 pont úgy, hogy nem esik mind egy síkra. Pirosra és sárgára színezzük a pontokat. Tudjuk, hogy minden gömbön - amelyre legalább 4 pont illeszkedik - azonos a piros illetve a sárga pontok száma. Igazoljuk, hogy minden pont egy gömbön van!

5. Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden számjegye közé legfeljebb k számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy választhatjuk úgy k-t, hogy a fenti művelet segítségével minden irracionális számot racionálissá tehetünk. Mi k legkisebb lehetséges értéke?

Játék. Ebben a játékban, ketten játszanak a vonal-, illetve a körjátékos. A vonaljátékos a mellékelt táblán minden lépésében besatírozza egy kis háromszög egyik oldalát, a körjátékos pedig kört tesz egy kis háromszög belsejébe. A játékot a vonaljátékos kezdi. A vonaljátékos akkor nyer, ha sikerül egy olyan kis háromszöget létrehoznia, aminek mindhárom oldala satírozott, és nincs a belsejében kör. Ha ez a helyzet előáll, akkor a játék véget is ér. A körjátékos akkor nyer, ha minden háromszög belsejébe került már kör.