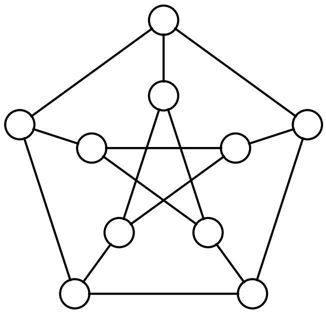
IV. Dürer Matematikaverseny, 2010 – 2011
D kategória, Levelező forduló

1. Az alábbi ábrán egy Petersen-gráf látható. Írj a csúcsaira egész számokat úgy, hogy minden csúcsnál az ott lévő szám a szomszédokra írt számok az összege legyen, és ne legyen mind 0.



2. Ki lehet-e színezni a pozitív egész számokat két színnel úgy, hogy két egyforma színű (nem feltétlenül különböző) szám összege épp az összeadandókkal ellentétes színű legyen?

3. Egy 2010×2010-es táblázatba (balról jobbra, föntről lefelé) sorra beírtuk a számokat 1-től 2010^2-ig (ezt láthatjuk az alábbi ábrán). Kiszíneztük a mezőket kékre és zöldre úgy, hogy minden sorban és oszlopban ugyanannyi kék mező van, mint zöld. Igazoljuk, hogy a kék mezőkön lévő számok összege ugyanannyi, mint a zöldeken lévők összege!

1	2	3	$\dots$	2010
2011	2012	2013	$\dots$	$2 \cdot 2010$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$2009 \cdot 2010 + 1$	$2009 \cdot 2010 + 2$	$2009 \cdot 2010 + 3$	$\dots$	$2010 \cdot 2010$

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $x, y, z > 0$ számra teljesül, hogy

$$\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

5. Igaz-e, hogy minden konvex sokszögben kiválasztható 3 szomszédos csúcs úgy, hogy a köréjük írt kör lefedi az egész sokszöget?