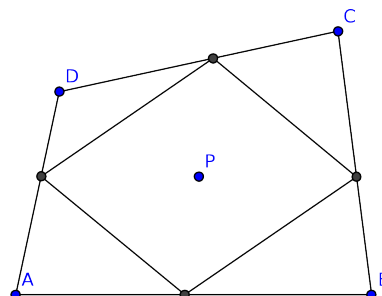




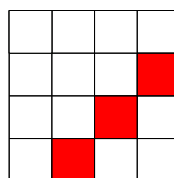
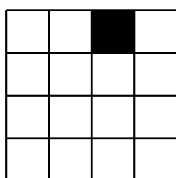
Dürer Matematikaverseny 2012 Döntő  
Matematika C kategória (9-10. osztályosok)

1. Egy 5 jegyű pozitív egész számnak leírtuk 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal való osztási maradékát ebben a sorrendben, és a számot magát kaptuk. Adjuk meg az összes lehetséges számot, amire ezt megtehettük!
2. Van két teljesen egyforma üvegünk, az elsőt teletöltöttük vízzel, a második üres. Az elsőből áttöltjük az ott lévő víz felét a másodikba. Aztán a másodikból áttöltjük az ott lévő víz egyharmadát az elsőbe. Aztán az elsőből áttöltjük az ott lévő víz egynegyedét a másodikba. Aztán a másodikból áttöltjük az ott lévő víz egyötödét az elsőbe, és így haladunk tovább. Mennyi víz van az első üvegben a 2012-edik áttöltés után?

3. Adott egy konvex négyszög, melynek szemközti oldalai nem párhuzamosak, továbbá adott egy belső  $P$  pontja. Keresünk egy olyan paralelogrammát, melynek csúcsai a négyszög oldalegyenesein vannak, középpontja pedig  $P$ . Adjunk egy módszert, amivel megszerkeszthetjük (feltéve, hogy létezik ilyen)!



4. Egy  $S$  halmaz tartalmazza az 1-et és a 2-t, valamint még néhány 100-nál nem nagyobb pozitív egészet. Legfeljebb mennyi lehet az elemszáma, ha két különböző  $S$ -beli szám összege nincs  $S$ -ben?
5. A bal oldali ábrán látható  $4 \times 4$ -es táblázat egy mezője fekete. Egy lépésben egy sor, oszlop vagy átló összes mezőjének színét ellenkezőjére cserélhetjük (tehát a fehér mezők feketék lesznek, a feketék pedig fehérek). Rövid átlókat is megengedünk, erre mutat két példát a jobb oldali ábra (speciálisan a sarokmező is egy egyetlen elemű átló). Bizonyítsuk be, hogy nem érhető el, hogy minden mező fehér legyen!



6. **Játék:** A játék kezdetén az asztalon van három kupac, melyekben 2010, 2011 illetve 2012 kavics van. A soron következő játékos egy lépésében eldob két kupacot, és a megmaradt kupacban lévő kavicsokból újra három kupacot csinál. Az veszít, aki már nem tud három kupacot építeni a megmaradt kavicsokból (vagyis a kiválasztott kupacban kevesebb mint három kavics maradt). Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy szeretnétek-e kezdeni a játékban!

*Az első öt feladat megoldása egyenként 8 pontot ér.*

*A megoldásokat indokolni kell, a pusztá eredményközlés nem ér pontot. Általánosításért vagy lényegesen különböző, új megoldásért feladatonként legfeljebb +2 pont kapható.*

*A játékban a versenyzők legfeljebb háromszor mérettethetik meg magukat a szervezők ellen. Egy mérkőzés két játszából áll: akkor győztek le a szervezőket, ha mindkét játszmát Ti nyertek. Ha az első mérkőzést megnyertek, akkor 8, ha csak a másodikat, akkor 4, ha pedig harmadszorra sikerül csak győzni, akkor 2 pontot kaptok (ha esetleg akkor sem, akkor 0-t).*

Sikeres versenyzést kívánunk!