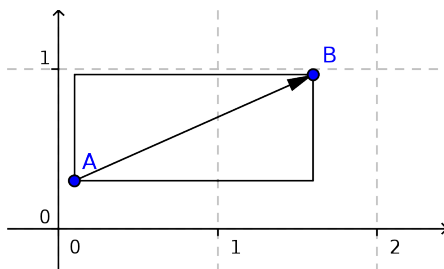


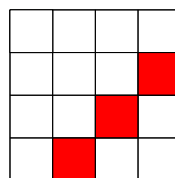
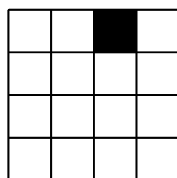


Dürer Matematikaverseny 2012 Döntő
Matematika D kategória (11-12. osztályosok)

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész n , amelyre $n^3 + 2n^2$ egy páratlan szám négyzete?
2. Egy 12 cm-es vonalzón csak a 0 és 12 cm-es jel látható. Legalább hány jelet kell még berajzolni a vonalzóra, hogy 12 cm-ig minden centiméterben mérve egész távolságot lemérhessünk? (Akkor tekintünk "lemérhetőnek" egy adott d távolságot, ha van a vonalzón két olyan jel, amelyek távolsága pontosan d .)
3. A Hiperbolha egy igen különös állat. A sík pontjain ugrál az alábbi szabály szerint: ha az ugrása kezdő- és végpontjából párhuzamosokat húzunk a koordinátatengelyekkel, a kapott téglalap területe 1 kell legyen (a koordinátatengelyekkel párhuzamosan tehát nem is ugorhat, hiszen ilyenkor nem is keletkezne téglalap). A bolha az origóból indul. Hogyan ugráljon, hogy a lehető legkevesebb szökkenéssel eljusson a (2,3) pontba?



4. A bal oldali ábrán látható 4×4 -es táblázat egy mezője fekete. Egy lépésben egy sor, oszlop vagy átló összes mezőjének színét ellenkezőjére cserélhetjük (tehát a fehér mezők feketék lesznek, a feketék pedig fehérek). Rövid átlókat is megengedünk, erre mutat két példát a jobb oldali ábra (speciálisan a sarokmező is egy egyetlen elemű átló). Bizonyítsuk be, hogy nem érhető el, hogy minden mező fehér legyen!



5. Egy egységsugarú körvonal pontjait két színnel színezzük. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható úgy 3 azonos színű pont, hogy az általuk meghatározott háromszög területe legalább $\frac{9}{10}$.
6. **Játék:** Jenő és Béla játsszák a következő játékot: együtt "építenek" egy 10 jegyű számot. Jenő kezd, majd felváltva választanak egy-egy számjegyet az $\{1,2,3,4,5,6\}$ halmazból, és sorban egymás mögé írják őket. Béla nyer, ha a kapott szám osztható 9-cel, egyébként Jenő. Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Azt Ti döntitek el, hogy Jenő vagy Béla bőrébe szeretnétek bújni.

Az első öt feladat megoldása egyenként 8 pontot ér.

A megoldásokat indokolni kell, a pusztá eredményközlés nem ér pontot. Általánosításért vagy lényegesen különböző, új megoldásért feladatonként legfeljebb +2 pont kapható.

A játékban a versenyzők legfeljebb háromszor mérettethetik meg magukat a szervezők ellen. Egy mérkőzés két játszmából áll: akkor győztek le a szervezőket, ha mindkét játszmát Ti nyertétek. Ha az első mérkőzést megnyertétek, akkor 8, ha csak a másodikat, akkor 4, ha pedig harmadszorra sikerül csak győzni, akkor 2 pontot kaptok (ha esetleg akkor sem, akkor 0-t).

Sikeres versenyzést kívánunk!