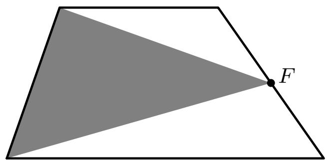
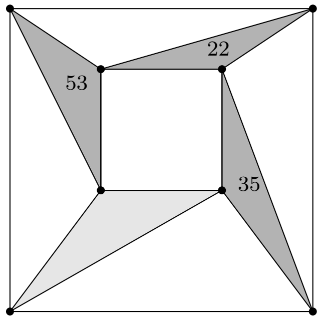
VI. Dürer Matematikaverseny, 2012 – 2013
B kategória, Váltó

B I. oszlop 1. Az ábrán látható trapéz területe 60 egység. Az egyik szár felezőpontja F. Tekintsük az F pont és a másik szár által bezárt háromszöget (az ábrán szürkével van jelölve). Mekkora a területe? (2p)



B I. oszlop 2. Az ABC egyenlő szárú, hegyesszögű háromszöget az egyik belső szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre bontja. Mekkora az ABC háromszög legkisebb szöge? (3p)

B I. oszlop 3. Egy nagy négyzet belsejébe egy kisebb négyzetet tettünk úgy, hogy a megfelelő oldalaik párhuzamosak legyenek. A kis négyzet egy-egy oldalát összekötöttük a nagy négyzet egy-egy csúcsával, az ábrán látható módon. Az így keletkezett kis háromszögek területe rendre $53, 22$ illetve 35 egység. Hány egység a negyedik háromszög területe? (3p)



B I. oszlop 4. Egy háromszög három magassága $m_a < m_b < m_c$, ahol mindhárom magasság hossza centiméterben mérve egy-egy egész szám. Tudjuk, hogy $m_a = 2$ cm. Milyen hosszú m_b? (4p)

B I. oszlop 5. Egy hétszögnek kiszámoltuk a szomszédos szögeinek összegét. Az első hat eredmény rendre $264°, 263°, 309°, 292°, 285°, 185°$ lett. Mekkora a hétszög legkisebb szöge? (5p)

B II. oszlop 1. Mennyi a 100 legkisebb pozitív páros szám számjegyeinek összege? (2p)

B II. oszlop 2. Összeszoroztunk 7 egymást követő, 50-nél kisebb pozitív egész számot, és eredményül egy olyan számot kaptunk, melynek utolsó két jegye 0. Hányféleképpen választhattuk ki a 7 egymást követő egészet? (3p)

B II. oszlop 3. Olyan négyjegyű számokkal foglalkozunk, amikben csak 3-as vagy 4-es számjegy szerepel. Az összes lehetséges olyan számpárt elkészítjük, aminek mindkét tagja ilyen típusú. Ezután minden párban összeadjuk a pár két tagját. Hány különböző összeget kapunk? (3p)

B II. oszlop 4. A négyjegyű $\overline{abcd}$ egy páros négyzetszám, ahol $a \cdot b \cdot c \cdot d = 54$. Melyik ez a szám? (4p)

B II. oszlop 5. Legyenek a, b, c, d pozitív egész számok, amelyekre

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

Hányféle (különböző) megoldás van, ha $a \leq b \leq c \leq d$? (5p)

B III. oszlop 1. A lovagok és lókötők szigetén öt emberrel találkozunk. Tudjuk azt, hogy több lovag van köztük, mint lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Az öt ember a következőket mondja:

A) E lovag.
B) D lovag.
C) A lókötő.
D) C lókötő.
E) B lovag.

Hány lovag van közöttük? (2p)

B III. oszlop 2. Egy 3×3-as táblázat mezőiben 1 és 9 közötti egész számok vannak, mindegyik pontosan egyszer:

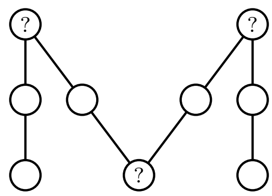
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Valaki megadta nekünk a három oszlopban és a három sorban az ott lévő elemek szorzatát. A sorok szorzatai, rendre: $20 = a \cdot b \cdot c, 108 = d \cdot e \cdot f, 168 = g \cdot h \cdot i$; az oszlopok szorzatai pedig: $42 = a \cdot d \cdot g, 80 = b \cdot e \cdot h, 108 = c \cdot f \cdot i$.

Mivel egyenlő e? (2p)

B III. oszlop 3. Egy futóversenyen 2 ötfős csapat versenyzett. Egy csapat pontszáma a tagok helyezéseinek összege (holtverseny nem alakult ki). Hányféle pontszáma lehetett a győztes (kevesebb pontot gyűjtő) csapatnak? (4p)

B III. oszlop 4. Az alábbi M betűben a 9 mezőt az $1, 2, \ldots 9$ számokkal töltötték ki (mindegyik pontosan egyszer szerepel). A négy száron a számhármasok összege ugyanaz az n szám. Mennyi a kérdőjelek helyére írt számok összege, ha n a lehető legnagyobb? (4p)



B III. oszlop 5. Egy sakktábla minél több mezőjét szeretnénk pirosra festeni, de úgy, hogy ne legyen teljesen pirosra festett átló (akár egyetlen sarokmező is átlónak számít). Legfeljebb hány mezőt festhetünk pirosra? (5p)