VI. Dürer Matematikaverseny, 2012 – 2013
C kategória, Váltó

C I. oszlop 1. Hányféleképpen lehet sorba rakni három kék, két zöld, és egy piros golyót úgy, hogy azonos színűek ne kerüljenek egymás mellé? (2p)

C I. oszlop 2. A velencei karneválon külön pénzt vezetnek be, van 6, 9, és 20 értékű fabatka. Mennyi az a legmagasabb összeg, amit sehogyan sem tudunk pontosan kifizetni? (3p)

C I. oszlop 3. Egy társaság együtt utazik a velencei karneválra, kilencféle álarcból vásárolnak maguknak. Ha mindenki három fajta álarcot vesz, és bármely két ember legfeljebb egy egyforma álarcot vesz, akkor hányan lehetnek legfeljebb a társaságban? (4p)

C I. oszlop 4. Egy 8×8-as táblázat minden mezőjét pirosra vagy kékre színezzük úgy, hogy minden 2×2-es részen két kék és két pirosra festett mező legyen. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha az egymásba forgatható színezéseket különbözőnek tekintjük? (4p)

C I. oszlop 5. Nevezzünk egy sorozatot édeninek, ha elemei az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazból valók, a sorozat szigorúan monoton nő, páratlan indexű helyeken páratlan szám áll, páros indexű helyeken páros. Jelölje $e(N)$ az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazból képezhető édeni sorozatok számát, például $e(3) = 4$, mert az $\{1, 2, 3\}$ elemekből képezhető édeni sorozatok: 1; 3; 1,2; 1,2,3. Ha tudjuk, hogy $e(17) = 4180$ és $e(20) = 17710$, mennyi $e(18)$? (4p)

C II. oszlop 1. Egy sorozat első tagja 2, második tagja 5, a további tagokat pedig az $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$ rekurzív képlet alapján határozzuk meg. Tízes számrendszerben hány 0-ra végződik a sorozat 13. tagja? (2p)

C II. oszlop 2. Jelölje $s(n)$ n számjegyeinek összegét tízes számrendszerben. Maximálisan mennyi lehet $\frac{s(n)}{s(16 \cdot n)}$ értéke? (3p)

C II. oszlop 3. Néhány pozitív egész szám összege 20. Mennyi lehet maximálisan a szorzatuk? (3p)

C II. oszlop 4. Az $A = \{1, 2, \ldots, 16, 17\}$ halmaz minden részhalmazában kiszámoljuk az elemek reciprokának szorzatát. Mi ezen értékek összege? (Az üres szorzatot tekintsük egynek.) (4p)

C II. oszlop 5. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Minden részhalmazához hozzárendelünk egy értéket úgy, hogy egy egyelemű részhalmaz értéke a benne lévő elem, egy k elemű részhalmaz értéke az összes benne lévő $k - 1$ elemű részhalmaz értékének összege. Mennyi A értéke? (5p)

C III. oszlop 1. A Kis Herceg egy szabályos gömb alakú bolygón él, melynek sugara 24 km. Egy helikopterrel 2 km magasan a felszín felett lebeg. Milyen messze van tőle az a legtávolabbi pont a felszínen, amit még lát? (2p)

C III. oszlop 2. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy kilencszögnek és egy tízszögnek? (A két sokszög lehet konkáv is.) (3p)

C III. oszlop 3. Az $ABCD$ négyzet CD oldalán felvettünk egyenlő távolságra k darab osztópontot: $F_1, F_2, \ldots F_k$, azaz $DF_1 = F_1F_2 = \ldots = F_kC$. Az AB oldalon felvettük az E pontot úgy, hogy az AE és DF_1 szakaszok egyenlő hosszúak. Mennyi fokban mérve az $AF_1E\measuredangle + AF_2E\measuredangle + \ldots + AF_kE + ACE\measuredangle$ szögösszeg? (3p)

C III. oszlop 4. Az ABC háromszögben $AB = 25$, $CA = 39$. A BC oldal felezőpontja legyen F. F-en keresztül húzzunk párhuzamost az A csúcsbeli külső szögfelezővel, ez messe a CA oldalt M-ben. Mekkora az AM távolság? (4p)

C III. oszlop 5. Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szög $60°$-os. $BC^2 = AC(AC + AB)$. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge fokban mérve? (5p)