VI. Dürer Matematikaverseny, 2012 – 2013
D kategória, Váltó

D I. oszlop 1. Hányféleképpen lehet sorba rakni három kék, két zöld és egy piros korongot, hogy azonos színűek ne kerüljenek egymás mellé? (2p)

D I. oszlop 2. Ha este Aladár hűtőjében lévő sörök száma 3-mal osztható, akkor megissza a $\frac{2}{3}$-át, különben megelégszik eggyel. Ha kezdetben üres volt a hűtője, és legfeljebb 100 sört tud venni a pénzéből, akkor mennyit szerezzen be, hogy a legtovább kitartson? (3p)

D I. oszlop 3. Hányféleképpen lehet kiszínezni egy 8×8-as táblázat mezőit pirosra és kékre, hogy bármely 2×2-es részben két piros és két kék mező legyen? (4p)

D I. oszlop 4. A tér bizonyos egész koordinátájú rácspontjaira betűket helyeztünk. Az origóba D-betűt, az origótól 1 távolságra lévő rácspontokra Ü-betűt, 2 távolságra R-betűt, 3 távolságra E-betűt, 4 távolságra pedig szintén R-betűt. Hányféleképpen tudunk az origóból indulva, attól mindig távolodva, a rácspontokon haladva pont a DÜRER kifejezés betűin végig haladni? (Itt egy (x, y, z) koordinátájú pont origótól vett távolságán az $|x| + |y| + |z|$ számot értjük.) (4p)

D I. oszlop 5. Ha 8 embert osztottak be elvégzendő feladatokhoz úgy, hogy minden feladatot 3 embernek is kiadtak, de senki sem kapott 2-nél többet, akkor maximum hány elvégzendő feladat volt? (4p)

D II. oszlop 1. Néhány pozitív egész szám összege 20, mennyi lehet maximálisan a szorzatuk? (3p)

D II. oszlop 2.. Jelölje $S(n)$ az n pozitív egész számjegyeinek összegét. Mennyi lehet maximum $\frac{S(n)}{S(16n)}$? (3p)

D II. oszlop 3. Az első 5000 pozitív egész számból legfeljebb hányat választhatunk ki, ha tudjuk, hogy bármely kettőnek van 1-nél nagyobb közös osztója, de bármely háromnak nincs? (4p)

D II. oszlop 5. Mennyi a 7000-nél kisebb, 7-tel osztható természetes számok számjegyeinek összege? (5p)

D III. oszlop 1. Egy 2013 területű szabályos hatszögbe behúztuk a 6 rövidebb átlót. Mennyi a középső hatszög területe? (2p)

D III. oszlop 2. Egy egységoldalú szabályos háromszög az egyik oldalán áll, de mi megdöntöttük és alátámasztottuk a levegőben lévő csúcsát egy függőlegesen álló pálcával úgy, hogy délben az árnyéka egy 120°-os egyenlő szárú háromszög volt. Legyen a pálca hossza x. Mennyi $2013 \cdot x^2$, ha délben a nap merőlegesen süt a földfelszínre? (3p)

D III. oszlop 3. Hány olyan (n, k) számpár van, amire az n és k oldalú szabályos sokszög belső szögének eltérése 1°? (3p)

D III. oszlop 4. Ha 75 éves hollónál 50% az esélye, hogy még legalább 10 évet, 20% az esélye, hogy még legalább 15 évet él, és 80 éves korában 24% az esélye, hogy még legalább 10 évet él, akkor hány % az esélye annak, hogy 80 éves korban még legalább 5 évet él? (4p)

D III. oszlop 5. Az ABC háromszögben az AB oldal harmadolópontjai (A-tól B-ig) C_1 és C_2, az AC oldal negyedelőpontjai (A-tól C-ig) B_1, B_2 és B_3. Legyen O a C_2B_1 és C_1B_3 szakaszok metszéspontja, P pedig az AO és BC szakaszok által meghatározott egyenesek metszéspontja. Számoljuk ki, hogy milyen arányban osztja P a BC oldalt, majd a törtet hozzuk a legegyszerűbb alakra. Mi a számláló és nevező összege? (5p)