



Matematika D kategória (11-12. osztályosok) 2013. február 8.

1. Adott páros sok érme közül bármely kettő súlyának különbsége legfeljebb 1 uncia. Bizonyítsuk be, hogy ekkor két csoportba lehet őket gyűjteni úgy, hogy a csoportok összsúlyának a különbsége is legfeljebb 1 uncia legyen.
2. A p egész együtthatós polinomról tudjuk, hogy $p(0)$, $p(1)$ páratlanok. Lássuk be, hogy p -nek nincs egész gyöke.
3. Az ABC háromszög köré írt köre k . Az A -ból induló, T talppontú magasság P -ben metszi k -t. P -ből merőlegest állítunk az AB oldalegyenesre, ennek talppontja R . Bizonyítsuk be, hogy a TR egyenes párhuzamos a k kör A -beli érintőjével.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha d , n pozitív egészek és $d|n^2$, akkor $n^2 + d$ nem négyzetszám.
5. Dürer összes vagyona 10 velencei dukát. Tudja, hogy a firenzei pénzváltóban 3 dukátért cserébe adnak 4 firenzei aranyforintot, a velencei pénzváltóban pedig 3 aranyforintért adnak 2 dukátot. Meggazdagodhat-e Dürer, azaz elérheti-e, hogy 100 dukátja legyen?
6. (Játék) Hunyadi és a török szultán harcol. A várlépcső fokain néhány janicsár áll. Minden reggel a szultán kettéosztja a hadseregét egy piros és egy zöld hadtestre, Hunyadi a nap folyamán vagy a piros, vagy a zöld sereget megsemmisíti, választása szerint. Éjszaka minden megmaradt janicsár egy lépcsőfokot fellép. Hunyadi nyer, ha a szultán egész seregét megsemmisítette, a szultán nyer, ha lesz olyan janicsár, aki felér a várhoz.
Azt, hogy kezdetben melyik lépcsőfokokon hány janicsár áll, a szervező-ellenfél határozza meg a játszmátok előtt. Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy Hunyadiékat vagy török szultánékat szeretnétek-e játszani!

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. A verseny alatt tilos a számológép, mobiltelefon és egyéb elektronikus eszközök használata. Jó versenyzést kívánunk: