



Dürer Matematikaverseny 2012 – 2013

B kategória, levelező forduló

1. Egy hajó kabinjában tízen alszanak, az átlagéletkoruk 30. A kapitány felébred, és elhagyja a szobát, így a szobában lévők életkorának átlaga 28-ra változik. Hány éves a kapitány?
2. Legyenek a és b olyan egész számok, melyekre teljesül, hogy $7a + 8b = 140$. Bizonyítsátok be, hogy $a \cdot b$ osztható 14-gyel.
3. Az iskolai focibajnokság egy csoportjában 4 csapat van. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszik. Győzelemért 3, vereségért 0, döntetlenért 1 pont jár. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat jut döntőbe (pontegyenlőség esetén pénzfeldobással döntenek). Az egyik csapat edzője a bajnokság megkezdése előtt a következőket írta a táblára:
 1. Ha legalább a pontot elérünk, biztosan továbbjutunk.
 2. Legalább b pontot el kell érünk, hogy legyen esélyünk továbbjutni.
 3. A legmagasabb pontszám, amivel kieshetünk: c .
 4. d a legmagasabb pontszám, amivel biztosan kiesünk.

Mennyi a, b, c és d értéke, ha az edző nem hibázott?

4. Az ABC háromszögben $ABC\angle = 45^\circ$, a D pont a háromszög BC oldalán úgy helyezkedik el, hogy $BC = 3BD$ és $ADC\angle = 60^\circ$. A C pontból az AD szakaszra állított merőleges talppontja O . Jancsi és Juliska a háromszög ábrája fölött vitatkoznak. Jancsi szerint az OA, OB, OC szakaszok közül OA a legrövidebb, Juliska viszont egyformának gondolja mind a hármat. Melyiküknek van igaza?
5. Bizonyítsátok be, hogy az első 20 pozitív egész közül bárhogy választunk ki 10-et, lesz köztük 4 különböző: a, b, c és d , melyekre $a + b = c + d$.

Mindenyik feladat részletesen indokolt megoldása 10 pontot ér. Általánosításért, lényegesen különböző második megoldásért feladatonként további 2 pont szerezhető. A feladatok megoldásához minden írásos és elektronikus segédeszköz igénybe vehető. Sikeres versenyzést kívánunk!