



Dürer Matematikaverseny 2012 – 2013

D kategória, levelező forduló

1. Dürer talált 4 egyformának látszó pénzérmét, de kettő közülük hamis volt. Dürernek van egy jósnője, aki segíthet megtalálni a hamis érméket. A jósnő egy látomás alkalmával mindig két pénzérmét vizsgál meg, és ezek közül kiválaszt egyet. Dürer tudja, hogy amennyiben az egyik pénzérme hamis, a másik pedig valódi, akkor a kiválasztott pénzérme is hamis. Minden más esetben a jósnő véletlenszerűen választ. Bizonyítsuk be, hogy Dürernek elég négy látomásra befizetnie, hogy megtalálja a hamis érméket.

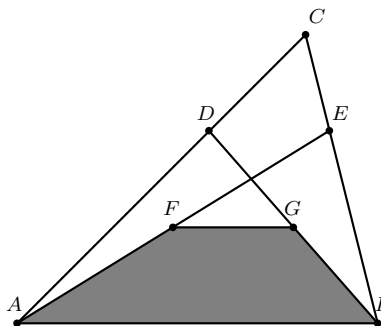
2. A '*' kétváltozós műveletre tetszőleges valós x, y, z számok esetén az alábbiak teljesülnek:

$$x * x = 0$$
$$x * (y * z) = (x * y) + z$$

Határozzuk meg $2013 * 2012$ értékét!

A kétváltozós műveletet úgy is képzelhetjük, mint egy gép, amelynek bal és jobb bemenetén egy-egy valós számot kell megadni, amire a gép kiad egy valós számot, ez a művelet eredménye. Például egy lehetséges gép az, aminél az a, b bemenetre $b^a + a + 7$ a kimenet.

3. Az ábrán látható ABC háromszög területe egységnyi. A D és E pontok az AC illetve BC oldalak C -hez közelebb eső harmadolópontjai. Legyen F az AE , G pedig a BD szakasz felezőpontja. Mekkora a jelölt $ABGF$ négyszög területe?



4. Egy város főútja mentén 150 lámpa sorakozik. Bármely 3 egymást követő lámpából legalább egy rossz. A város polgármestere elrendeli a lámpák megjavítását, ezért egy karbantartó végigmegy a lámpákon. Bármely 4 egymást követő lámpából legfeljebb 1 marad rossz a javítás után. Mennyi a megjavított lámpák számának lehetséges legkisebb értéke?

5. A térben adott 2012 körvonal, amelyeknek középpontjai nem esnek egy síkra. Bármely két körvonalat kiválasztva van olyan gömbfelület, amely mindkettő körvonalat tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy van olyan gömbfelület, amely mindegyik körvonalat tartalmazza.

Mindegyik feladat részletesen indokolt megoldása 10 pontot ér. Általánosításért, lényegesen különböző második megoldásért feladatonként további 2 pont szerezhető. A feladatok megoldásához minden írásos és elektronikus segédeszköz igénybe vehető. Sikeres versenyzést kívánunk!