Döntő, váltó
Matematika D kategória

VII. Dürer Verseny, 2014. február 8.

D1 Legyen S pozitív egész számok egy listája (egy szám szerepelhet többször is). Köztük van a 68, átlaguk 56. A 68-at kivéve a maradék átlaga 55. Legfeljebb mekkora lehet a legnagyobb S-beli szám? (3 pont)

D2 Hány oldalú az a szabályos sokszög, aminek a külső szöge fokban mérve 9-cel kisebb az oldalainak számánál? (3 pont)

D3 Egy négyjegyű szám jegyeit fordított sorrendben leírva éppen a szám kilencszeresét kaptuk. Mi lehetett ez a szám? (3 pont)

D4 Tudjuk, hogy az x, y, z számokra teljesül, hogy $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ és $x^3 + y^3 + z^3 = 57$. Mennyi $x^4 + y^4 + z^4$? (4 pont)

D5 Melyik az a legnagyobb 2-jegyű prímszám, ami osztja $\binom{200}{100}$-at? (4 pont)

D6 Az f függvény az egész számokhoz egészeket rendel, az alábbi szabály szerint:

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{ha } n \geq 1000 \\ f(f(n+5)) & \text{ha } n < 1000. \end{cases}$$

Mennyi $f(84)$? (4 pont)

D7 0-9-ig úgy akarjuk beírni a számjegyeket az 1_2_3_4_5_6_7_8_9_ _ hiányzó helyeire, hogy a végeredmény 396-tal osztható legyen. Hányféle lehet ilyen kitöltések esetén az utolsó két jegyből álló szám? (4 pont)

D8 Az A és a B csapat focizik egymással, A vezet 8-5-re. Tudjuk, hogy ha gól születik, A 2/5, B pedig 3/5 valószínűséggel rúgja azt. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy A nyer, ha addig játszanak, amíg az egyik csapat eléri a 10-et. Az eredmény hozzuk a legegyszerűbb törtalakra, mennyi ekkor a számláló és a nevező összege? (4 pont)

D9 Két kerékpáros, A és B egyidejűleg indul el P-be M-ből illetve N-ből. $|NP| = 30km + |MP|$. Mindketten 10 óra alatt teszik meg a távot. Mekkora $|MP|$, ha B-nek $42km$ megtevésére 20 perccel kevesebb időre van szüksége, mint A-nak? (5 pont)

D10 A $\triangle$ kétváltozós műveletre a következők teljesülnek:

- $x \triangle x = 0$

- $x \triangle (y \triangle z) = x \triangle y + z$.

Mennyi $2014 \triangle 7$? (5 pont)

D11 Az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazhoz, és minden nemüres részhalmazához tekintsük a következő alternáló összeget: rendezzük a részhalmaz elemeit csökkenő sorrendbe, és a legnagyobbtól kezdve váltakozva adjuk hozzá illetve vonjuk ki a soron következő számot. (Például az $\{1, 2, 5, 6\}$ részhalmazhoz tartozó alternáló összeg: $6 - 5 + 2 - 1 = 2$.) Mennyi az összege az összes ilyen alternáló összegnek? (5 pont)

D12 Egy pénzérmét dobálunk, és számoljuk, hogy hányszor követ egy fej dobást azonnal ismét egy fej dobás (FF), hányszor követ egy fej dobást egy írás (FI), valamint ezt írás kezdéssel hasonlóan (IF illetve II). Például a $FFIIFFFFIFFIIII$ sorozatban öt FF, három FI, kettő IF és négy II fordul elő. Hágy olyan 15 dobásból álló sorozat van, ami pontosan két FF, három FI, négy IF és öt II részsorozatot tartalmaz? (5 pont)

D13 Hány számot lehet legfeljebb kiválasztani az $1, 2, \ldots, 14$ számok közül úgy, hogy ne tartalmazzon 3 hosszú számtani sorozatot? (6 pont)

D14 Az ABC háromszögben C-nél derékszög, A-nál $72°$-os szög van. Legyen S a háromszög súlypontja. Hányszor nagyobb $|SA|^2 + |SB|^2$, mint $|SC|^2$? (6 pont)

D15 Egy irodában a főnök változó időközönként egy begépelendő levelet tesz a titkárnője íróasztalára. Minden alkalommal az aktuális levelet a titkárnő begépelendő leveleinek fenntartott kupac tetejére rakja. Amikor a titkárnőnek van ideje, akkor elveszi a kupac tetején lévő levelet, és begépeli. Egy nap a főnök összesen öt begépelendő levelet rakott titkárnője asztalára 1, 2, 3, 4, 5 sorrendben. Hányféle sorrendben gépelhette be a titkárnő a leveleket? (6 pont)

Megoldókulcs:

D-1.	649	D-6.	997	D-11.	448
D-2.	24	D-7.	4	D-12.	560
D-3.	1089	D-8.	5521	D-13.	8
D-4.	273	D-9.	180	D-14.	5
D-5.	61	D-10.	2007	D-15.	42