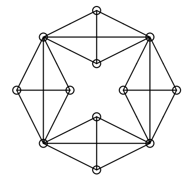
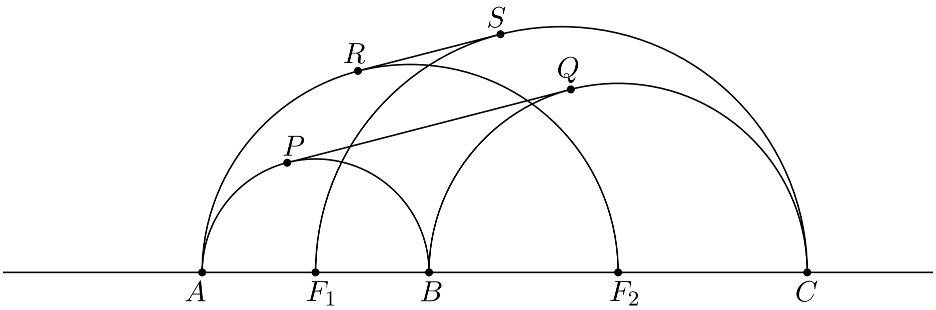
Matematika C kategória (9-10. osztályosok) – Levelező forduló

Beküldési határidő : 2013. November 25.

1. Dürer medált készít a kedvesének. A medál rajza az ábrán látható. A körrel jelölt helyekre egy-egy drágakövet tervez rakni, de úgy, hogy az éllel összekötött helyekre ne kerüljön azonos színű kő. Legalább hányféle színű követ kell beszereznie ehhez?



2. Az AB és BC szakaszok fölé rajzoltunk egy-egy félkört. F_1 felezi AB-t, és F_2 felezi BC-t. Az AF_2, és az F_1C szakaszok fölé szintén rajzoltunk egy-egy félkört. A PQ és az RS szakaszok az ábrán látható módon érintik a megfelelő félköröket.
Bizonyítsátok be, hogy $PQ \parallel RS$, valamint $|PQ| = 2 \cdot |RS|$.



3. Legyenek n és k természetes számok, amelyekre teljesül, hogy $2 \leq k < n$, és $k|n$.
Bizonyítsátok be, hogy $2^k - 1$ és $2^n + 1$ relatív prímek minden ilyen n és k esetén.

4. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $AB = CD = EA = 1$, $ABC\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 90°$, és $BC + DE = 1$. Mekkora az ötszög területe?

5. Legyen a_1 egy tetszőleges természetes szám. A sorozat további tagjait a következő szabály határozza meg: Minden $k \geq 2$ -re $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ és $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ osztható k-val.
a) Bizonyítsátok be, hogy adott a_1 mellett ez a szabály egyértelműen meghatároz egy sorozatot.
b) Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges a_1 esetén létezik olyan N természetes szám, hogy a sorozat az N. tagtól kezdve állandó, azaz $a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = a_{N+3} = \ldots$

Megoldásokat kizárólag elektronikusan fogadunk el a `http://www.durerinfo.hu/` *honlapon keresztül elérhető feltöltési rendszerben. Mindegyik feladat részletesen indokolt megoldása 10 pontot ér. Általánosításért, lényegesen különböző második megoldásért feladatonként további 2 pont szerezhető. A feladatok megoldásához minden írásos és elektronikus segédeszköz igénybe vehető, de csak pontos hivatkozással. Sikeres versenyzést kívánnak:*

a szervezők