# Váltóverseny, C kategória

VIII. Dürer Döntő, 2015. február 7.

**C1** Albrecht egy 200 szobás kollégium legfelső emeletén lakik. Az épületben – az alagsort nem számítva – mindegyik szinten pontosan 20 szoba van. Hányadik emeleten lakik Albrecht? (3 pont)

**C2** 20 tolmács közül mindenki pontosan 3 idegen nyelvet beszél. 16-an tudnak franciául, 12-en angolul, 10-en csehül, 7-en japánul, 1 valaki törökül. Hányan beszélnek olaszul, ha ezen a hat nyelven kívül senki nem ismer mást? (3 pont)

**C3** Hány különböző értéket vehet fel az

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$$

kifejezés, ha $a$, $b$ és $c$ nullától különböző valós számok? (3 pont)

**C4** Rajzoltam három háromszöget úgy, hogy 9 oldalegyenesük közül semely kettő nem esett egybe. A sík azon pontjait, melyeken mindegyik háromszögvonal átment, pirossal megjelöltem. Legfeljebb hány pontot jelölhettem meg pirossal? (3 pont)

**C5** A $p^2-(q+r)^2=136$ egyenlet olyan megoldásait keressük, ahol $p>q>r>0$ prímek.
Legfeljebb mennyi lehet $p\cdot q\cdot r$? (4 pont)

**C6** Az Ajtósi gyerekek: Anna, Luca és Károly karatéznak. Az edzésre összesen 10 gyerek jár, rajtuk kívül mindenki egyke. Az egyik gyakorlathoz párokba kell állniuk. Jelölje $p$ annak a valószínűségét, hogy egyik Ajtósi gyerek sem valamelyik testvére párja, ha minden párbaállítás egyenlő valószínűséggel fordul elő.
Mekkora $p$ egyszerűsített alakjában a számláló és nevező összege? (4 pont)

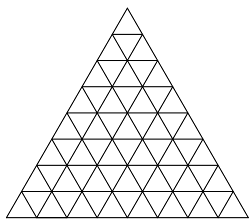
**C7** Az $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ számokra teljesül, hogy $a_0=a_{10}=1000$, és $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}-1 \quad (n=1,2,3,\ldots,9)$.
Mennyi $\min\{a_1,a_2,\ldots,a_{10}\}$? (4 pont)

**C8** Hány részre osztják a síkot egy szabályos 28-szög oldalegyenesei? (4 pont)

**C9** Dürernek 25 edénye van, melyek rendre $1,2,\ldots,25$ literesek. Hányféleképpen választható ki közülük 10 úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely kettővel kimérhető legyen 1 liter? (5 pont)

**C10**

Egy 13 oldalhosszúságú szabályos háromszöget az ábrához hasonló módon egységnyi oldalú kis háromszögekre bontottunk. Legfeljebb hány kisháromszög-oldal választható ki úgy, hogy a kiválasztottak közül semely kettőnek ne legyen azonos végpontja?
*Az ábra a 8 oldalhosszúságú esetet mutatja.*



(5 pont)

**C11** 0/1 sorozatokat vizsgálunk. Ezeken megengedett átalakításnak nevezzük a következőket:

- Három szomszédos 0 törlése (pl. 101**000**101 → 101101)
- Három szomszédos 1 törlése (pl. 1**111**01001 → 101001)
- 01 kicserélése 10-ra (pl. 10**01**101 → 10**10**101)

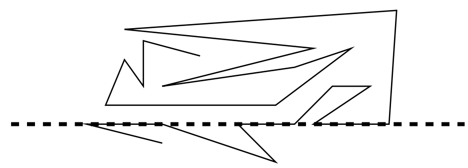
Az összes 10 hosszúságú 0/1 sorozat közül hányból érhető el megengedett lépések egymásutánjával egy 0 vagy egy 1 hosszúságú sorozat? (5 pont)

**C12** Az $a$ és $b$ nemnegatív valós számok teljesítik a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} a\sqrt{a}+b\sqrt{b} &= 183 \\ b\sqrt{a}+a\sqrt{b} &= 182 \end{aligned}$$

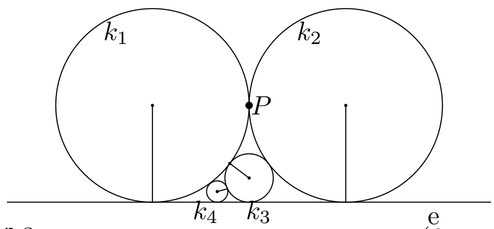
Mennyi $9(a+b)$? (5 pont)

**C13**
A *kacskaringós krikszkrakszok* olyan magukat nem metsző törött-vonalak, amelyek 21 egyenes részszakaszból állnak, és két végpontjuk különbözik. Legkevesebb hány egyenessel lehet lefedni egy kacskaringós krikszkrakszot? (Azaz mi a legkisebb $k$ pozitív egész szám, amelyre teljesül a következő állítás: van olyan kacskaringós krikszkraksz, amelyhez kijelölhető $k$ egyenes úgy, hogy az összes részszakasz valamelyik kijelölt egyenesre essék?)



*Az ábra egy kacskaringós krikszkrakszot ábrázol. Szaggatottal egy három részszakaszt lefedő egyenest is jelöltünk.* (6 pont)

**C14** Az egységnyi sugarú $k_1$ és $k_2$ körök a $P$ pontban érintik egymást. A két kör egyik $P$-n át nem menő közös érintője az $e$ egyenes. Legyen minden $i > 2$ esetén $k_i$ az a $k_{i-2}$-től különböző kör, amely érinti $k_1$-et, $k_{i-1}$-et és $e$-t. Határozzuk meg $k_{100}$ sugarának reciprokát. (6 pont)




**C15** Legfeljebb hány részre osztja a teret 10 egy ponton átmenő sík? (6 pont)

**C16** Dürer hintójába 8 ló van befogva egymás mögé egy oszlopban. Minden ló csak a közvetlenül előtte futó ló farát látja. Hogy egyenletesebben fáradjanak, Dürer a hosszú utazás során néhányszor kicserél két közvetlenül egymás után futó lovat. Nincs két olyan ló, akiket kétszer is felcserélne egymással. Ha egy ló látja egy másiknak a farát, akkor barátság szövődik köztük, ami azonban örökre és megváltoztathatatlanul elromlik, ha a másik is meglátta az övét. Legfeljebb hány barátság élhet a lovak között az utazás végén? (6 pont)

## Megoldókulcs:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C-1. | 9 | C-2. | 14? | C-3. | 3 | C-4. | 4 |
| C-5. | 494 | C-6. | 5 | C-7. | 975 | C-8. | 393 |
| C-9. | 16 | C-10. | 52 | C-11. | 682 | C-12. | 365 |
| C-13. | 7 | C-14. | 9801 | C-15. | 92 | C-16. | 12 |

Sajnos a verseny során a szervezők megoldókulcsában a C-11. feladatnál hibásan az 1 szerepelt válaszként. A versenyszabályzat értelmében az esetlegesen ezen a feladaton szerzett pontszámok nem számítottak bele a versenybe. A hibáért elnézést nérünk.