Váltóverseny, D kategória

VIII. Dürer Döntő, 2015. február 7.

D1 Van két kupacunk, bennük 6 illetve 8 kavics. Egy lépésben valamelyik kupacba beletehetünk néhány kavicsot, a másikba pedig háromszor annyit. Hogy pontosan mennyit, illetve hogy melyikbe tesszük a többet, azt mi választhatjuk ki. Hányféle lépéssorozattal lehet elérni, hogy mindkét kupacban 50–50 kavics legyen? (3 pont)

D2 Egy faluban kétféle számrendszert használnak. Megkérdeztünk két helyi lakost.
Az egyik ezt mondta: *„25 lakosa van a falunak, 13-an mindkét rendszert ismerik, 1 pedig egyet se.”*
A másik így szólt: *„Az 10 alapú számrendszert 26-an ismerik, az 14-est ismerők 22-en vannak.”*
A lakosok egy mondaton belül végig ugyanazt a számrendszert használják, akkor is ha egyébként többféle számrendszert is ismernek. Mi a két számrendszer alapszámának a szorzata? (3 pont)

D3 Osszuk el az összes háromjegyű számot a számjegyeinek összegével.
Mekkora a legnagyobb érték, amit így kaptunk? (3 pont)

D4 1-től n-ig kiszíneztük az egész számokat pirossal és kékkel úgy, hogy ne keletkezzen egyszínű, háromtagú számtani sorozat. Mi a legnagyobb n, amire ezt még megtehetjük? (3 pont)

D5 Az $ABCD$ téglalap AC átlójára merőlegeseket állítottunk a B és D csúcsokból. A talppontok az AC átlót három darab $\sqrt{2}$ hosszú szakaszra osztják fel. Mennyi a téglalap területének a négyzete? (4 pont)

D6 Az $a_1, a_2, \dots$ sorozatra $n \geq 3$ esetén fennáll, hogy $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$.
Tudjuk továbbá, hogy $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = 88$ és $a_1 + a_2 + \cdots + a_{88} = 2015$.
Mennyi $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013}$? (4 pont)

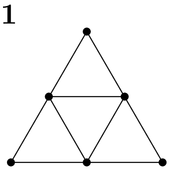
D7 Összeszoroztunk 5 egymást követő egész számot, és így az $\overline{ABABAB}$ szám 120-szorosát kaptuk. Mi volt a középső szám? (4 pont)

D8 Egy 8 elemű halmaznak kiválasztjuk $A_1, A_2, \dots A_k$ 3-elemű részhalmazait úgy, hogy $|A_i \cap A_j| = 2$ semelyik két halmazra nem teljesül. Mi a legnagyobb k amire ezt még megtehetjük? (4 pont)

D9 Az e és f egyenesek metszéspontja O, hajlásszögük $18°$, az e egyenes egy O-tól különböző pontja legyen E_1. Ezután az $F_2, E_3, F_4, E_5, \dots$ pontokat úgy jelöljük ki felváltva az f illetve e egyeneseken, hogy azok minden korábbi ponttól különbözzenek, továbbá $OE_1 = E_1F_2 = F_2E_3 = E_3F_4 = \dots$.
Mennyi az indexe az utolsó pontnak, amit így fel tudunk venni? (5 pont)

D10 A 4030 darab 1-esből álló számból kivontuk a 2015 darab 2-esből álló számot, majd a különbségből gyököt vontunk. Mennyi az így kapott szám számjegyeinek összege? (5 pont)

D11



Az ábrán látható kis szakaszokat szeretnénk kiszínezni 3 színnel úgy, hogy a kis háromszögek egyikét se határolja pontosan két szín. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (5 pont)

D12 Egy trapéz két alapja 4 és 9 egység hosszú, továbbá lehet egy az alapokkal párhuzamos egyenest húzni, mely úgy osztja két kisebb trapézra, hogy mindkettőnek lesz beírható köre.
Hány egység a trapéz kerülete? (5 pont)

D13 Tegyük fel, hogy valaki minden lehetséges totótippet elkészít egy héten (13 mérkőzés, kitöltve 1, vagy 2, vagy X jellel), majd a mérkőzések után csoportosítja tippjeit a rajtuk lévő találatok száma szerint. Hány találatos csoportba kerül a legtöbb tipp? (6 pont)

D14 Egy egységnégyzet minden oldalát feloszottuk n egyenlő hosszúságú szakaszra, oldalanként $n-1$ osztópont segítségével. Legyen az AB oldal A-hoz legközelebbi osztópontja A_1, és hasonlóan körbe vegyük így fel a BC, CD, DA oldalakon a B_1, C_1, D_1 pontokat. Ezután húzzuk be az AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 szakaszokat. Ezek középen meghatároznak egy kis négyzetet, amelynek a területe $\frac{1}{181}$. Mekkora az n? (6 pont)

D15 Hét osztálytárs a bizonyítványosztás után megállapította, hogy nincs köztük kettő, aki mind a 12 tárgyból ugyanazt az osztályzatot kapta volna. A 12 tárgyból ki lehet választani k olyat, hogy ha csak az ebből a k tárgyból kapott osztályzatokat hasonlítjuk össze, akkor sincs a hét diák közt két olyan, aki mind a k tárgyból ugyanazt a jegyet kapta. Melyik a legkisebb k, amire ezt még biztosan megtehetjük? (6 pont)

D16 Az $ABCD$ tetraéder A csúcsát tükrözve a B-re, kapjuk az A_1 pontot. Hasonlóan a B tükörképe C-re B_1, a C-é D-re C_1 és a D-é A-ra D_1. Hányszorosa az $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder térfogata az $ABCD$ térfogatának? (6 pont)

Megoldókulcs:

D-1.	0	D-2.	165	D-3.	100	D-4.	8
D-5.	72	D-6.	3854	D-7.	37	D-8.	8
D-9.	5	D-10.	6045	D-11.	243	D-12.	38
D-13.	4	D-14.	10	D-15.	6	D-16.	15