



Matematika D kategória (11-12. osztályosok)

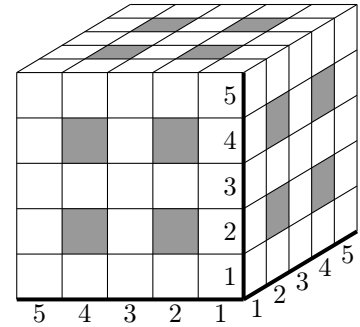
1. Van 5 külsőre egyforma ceruzaelemünk, melyek közül 3 jó és 2 rossz; és van egy gépünk, melybe (pontosan) 3 elemet lehet helyezni, és akkor működik, ha legalább kettő jó. Legkevesebb hány kísérlet szükséges ahhoz, hogy biztosan találjunk egy jó elemet?

2. Van egy a_1, a_2, \dots számtani és egy b_1, b_2, \dots mértani sorozatunk, melyekre $a_1 = b_1 = 1$, továbbá $a_2 = b_2$ pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a mértani sorozat minden tagja szerepel a számtani sorozatban is (azaz minden k -hoz létezik olyan ℓ , hogy $b_k = a_\ell$).

Egy mértani sorozat bármely két szomszédos tagjának hányadosa ugyanaz, azaz minden i -re fennáll $\frac{b_{i+1}}{b_i} = q$ egy a sorozatra jellemző q számmal.

3. Legyen $k \geq 3$ páratlan pozitív egész szám. Egy 1 méter élű tömör kocka egy csúcsában összefutó mindhárom élét k egyenlő részre osztjuk, majd az osztópontokon át az élre állított merőlegesekkel a kiválasztott csúcsban összefutó három lapot mindegyik oldalával párhuzamosan k sávra osztjuk; így mindhárom lapon k^2 kisebb négyzet keletkezik.

A sávokat a felosztott élektől kiindulva megsorszámozzuk, majd megjelöljük mindazokat a kis négyzeteket, amelyeket alkotó mindkét sáv sorszáma páros (ábrán szürke). Mindegyik megjelölt kis négyzetre egyenes hasábot állítunk, és a kocka anyagának ezekben a részeket eltávolítjuk.



a) Lehet-e k -t úgy választani, hogy a megmaradó test térfogata ne legyen nagyobb $\frac{1}{2} \text{ m}^3$ -nél?

b) Lehet-e k -t úgy választani, hogy a megmaradó test felszíne nagyobb legyen 100 m^2 -nél?

4. Az ABC hegyesszögű háromszög A -ból húzott magassága a BC oldalt A_1 -ben, a körülírt kört pedig (A -n kívül) A_2 -ben metszi. Hasonlóan kapjuk a B_1, B_2, C_1, C_2 pontokat.

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{AA_2}{AA_1} + \frac{BB_2}{BB_1} + \frac{CC_2}{CC_1} = 4.$$

5. a) A királylány lakosztálya egy egyenes folyosóról nyíló 100 szomszédos szobából áll. A királylány minden éjjelkor átköltözik egy szomszédos szobába. A herceg célja, hogy megtalálja a királylányt. Ehhez minden nap délben benyithat az egyik szobába, és megnézheti, hogy ott van-e a királylány. Segítsünk a hercegnek kitalálni egy olyan stratégiát, amellyel biztosan megtalálja egy éven belül.

b) A királylány felköltözött a vártoronyba. Az itteni 101 szobás lakosztálya azonban egy körfolyosóról nyílik. Most is minden éjjelkor átköltözik valamelyik szomszédos szobába. Ezúttal viszont a herceg naponta akár 2 szobába is benyithat. Segítsünk ismét a hercegnek.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 10 pontot ér. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. A verseny alatt tilos a számológép, mobiltelefon és egyéb elektronikus eszközök használata. Jó versenyzést kívánunk: