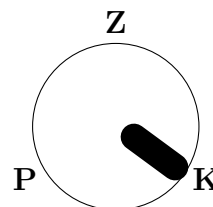




Matematika D kategória (11-12. osztályosok)

1. Az ABC háromszög mindhárom csúcsából merőlegeseket állítunk a többi csúcs külső és belső szögfelezőire. Igazoljuk, hogy az így kapott szakaszok négyzetösszege éppen $2(a^2 + b^2 + c^2)$, ahol a, b és c a háromszög oldalainak hosszát jelöli.

2. Van egy lámpánk, ami háromféle színben (piros, kék és zöld) tud világítani. A lámpára három darab háromállású forgókapcsoló is rá van kötve – a rajz egy ilyen kapcsolót mutat. Tudjuk, hogy ha mindhárom kapcsoló azonos állásban van, akkor a lámpa is a nekik megfelelő színnel világít. Továbbá, bárhogy is álljanak eredetileg a kapcsolók, ha mindháromat másik állásba fordítjuk, akkor megváltozik a lámpa színe. Mutassuk meg, hogy a kapcsolók egyikének állása a többitől függetlenül meghatározza a lámpa színét.



3. Az $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ számsorozatra jelölje $t_3(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ a benne előforduló 3-tagú számtani sorozatok számát (azaz az olyan $i < j < k$ index-hármasok számát, amelyekre $a_k - a_j = a_j - a_i$ teljesül). Igazoljuk, hogy $t_3(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \leq t_3(1, 2, 3, \dots, n)$.

4. Az $ABCD$ téglalap C csúcsának merőleges vetülete a BD átlón E , továbbá E vetülete az AB oldalon F , az AD oldalon G . Bizonyítsuk be, hogy

$$AF^{2/3} + AG^{2/3} = AC^{2/3}.$$

5. a) A királylány kastélya háromszintes, ahol minden szinten egy egyenes folyosó van, melyről 1-től 100-ig számozott szobák nyílnak. A királylány minden éjjélkor vagy átköltözik az egyik szomszédos szobába, vagy az ablakon keresztül egy szinttel feljebb vagy lejjebb mászik egy azonos sorszámú szobába. A herceg célja, hogy megtalálja a királylányt. Ehhez minden délben benyithat két szobába, és megnézheti, hogy ott van-e a királylány. Segítsünk a hercegnek kitalálni egy olyan stratégiát, amellyel biztosan megtalálja.

b) A királylány átköltözik egy magasabb, de jóval keskenyebb kastélyba: ennek négy szintje van, de szintenként csak négy szoba található benne. Mutassuk meg, hogy ekkor napi két ajtónyitással már nem feltétlenül tudja megtalálni őt a herceg.

Játék A játék kezdetén a szervezők néhány kupac gyufaszálat helyeznek az asztalra. Felváltva lépünk, kétféle lépés megengedett: vagy egyetlen gyufát elveszünk valamelyik kupacból, vagy egy kupacot felosztunk két kisebb kupacra. Az veszít, aki nem tud lépni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. A verseny alatt tilos a számológép, mobiltelefon és egyéb elektronikus eszközök használata. Jó versenyzést kívánunk:

a szervezők