



## Matematika C kategória (9-10. osztályosok)

- Legyen az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalegyenesének egy tetszőleges pontja  $P$ . Jelölje  $P$  merőleges vetületét az  $AC$  és  $BC$  oldalegyenesekre  $A_1$  és  $B_1$ . A  $C$ -ből induló magasság talppontját jelölje  $C_1$ . Bizonyítsuk be, hogy az  $A_1, B_1, C_1, C$  és  $P$  pontok egy körön helyezkednek el.
- Hányféleképpen írható fel a 2015 néhány szomszédos pozitív egész szám
  - összegeként?
  - szorzataként?
- 9 gyerek ül egy kerek asztal körül, mindegyikük gondol egy számra. Akárhogy választunk ki közülük  $k$  szomszédos gyereket, a gondolt számok összege ugyanannyi, pedig nem mindenki ugyanarra a számra gondolt. Határozzuk meg az összes olyan  $1 < k < 9$  értéket amire ez megtörténhet.
- Egy körmérkőzéses bajnokságban az egyik csapat győzelmi mutatója (vagyis az eddig megnyert meccseinek aránya az eddig lejátszott meccsek között) kevesebb, mint 75%, néhány meccsel később viszont több, mint 75%. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan meccs, ami után pontosan 75% volt!
- Legyen  $f$  olyan függvény, amely minden  $n$  pozitív egész szám esetén teljesíti a következőket:  $f(n)$  pozitív egész,  $f(n+1) > f(n)$  és  $f(f(n)) = 3n$ .
  - Mennyi lehet  $f(729)$  értéke?
  - Mennyi lehet  $f(2015)$  értéke?

*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 10 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 3 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.*

*A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk:*