Matematika C+ kategória (9-10. osztályosok)

1. A 4 egy olyan szám, aminek páratlan sok páratlan pozitív osztója van (csak az 1), és páros sok páros pozitív osztója (a 2 és a 4). Van-e olyan természetes szám, aminek páratlan sok páros pozitív osztója van, és páros sok páratlan pozitív osztója?

2. Egy körmérkőzéses bajnokságban az egyik csapat győzelmi mutatója (vagyis az eddig megnyert meccseinek aránya az eddig lejátszott meccsek között) kevesebb, mint 75%, néhány meccsel később viszont több, mint 75%. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan meccs, ami után pontosan 75% volt!

3. Legyen $ABCD$ egy egység oldalú négyzet. Melyik P belső pontjára lesz a $\sqrt{2} \cdot AP + BP + CP$ kifejezés értéke minimális, és mennyi ez a minimum?

4. Legyen f olyan függvény, amely minden n pozitív egész szám esetén teljesíti a következőket: $f(n)$ pozitív egész, $f(n+1) > f(n)$ és $f(f(n)) = 3n$. Mennyi lehet $f(2015)$ értéke?

5. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Az $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ halmaz egy olyan H részhalmazát szeretnénk kiválasztani, amely legalább $n-1$ elemű és teljesül rá a következő feltétel: ha x, $y \in H$ (itt x és y nem feltétlenül különböző elemek) és $x + y < 2n$, akkor $x + y \in H$. Jelölje S a H elemeinek összegét. Bizonyítsuk be, hogy S legkisebb lehetséges értéke $n(n-1)$.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 10 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 3 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a IX. Dürer Verseny szervezői