



Matematika D kategória (11-12. osztályosok)

1. Legyen az ABC háromszög AB oldalegyenesének egy tetszőleges pontja P . Jelölje P merőleges vetületét az AC és BC oldalegyenesekre A_1 és B_1 . A C -ből induló magasság talppontját jelölje C_1 . Bizonyítsuk be, hogy az A_1, B_1, C_1 és P pontok egy körön helyezkednek el.

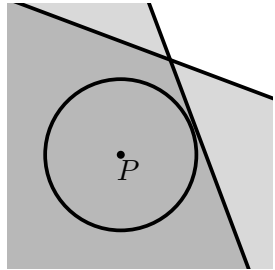
2. Egy n pozitív egész számot *reciprocizálhatónak* nevezünk, ha léteznek a_1, a_2, \dots, a_n különböző pozitív egész számok, amelyekre az

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

összeg értéke egész szám. Határozzuk meg az összes nem reciprocizálható pozitív egész számot.

3. a) Négy félsík metszete tartalmazza a P középpontú, egység sugarú kört. Bizonyítsuk be, hogy a metszet tartalmaz a P -től $\sqrt{2}$ távolságra levő pontot is.

Az ábrán két olyan félsík látható, amelyek metszete tartalmazza a P pont körüli egység sugarú kört. A félsíkok zártak, azaz tartalmazzák a határoló egyenesük pontjait is.



b) Hat féltér metszete tartalmazza a P középpontú, egység sugarú gömböt. Bizonyítsuk be, hogy a metszet tartalmaz a P -től $\sqrt{2}$ távolságra levő pontot is. A félterek zártak, azaz tartalmazzák a határoló síkjuk pontjait is.

4. Egy bolha ugrál a számegetes pozitív egész pontjain. Az 1-ről indul, minden nap egy új számra ugrik. Ha egy olyan számra érkezik, amelynek a (tíz-es számrendszerbeli) számjegyeinek összege megegyezik egy korábbi állomáshelyén vett jegyösszeggel, a bolha felrobban.

a) Tegyük fel, hogy a bolha k . ugrása legfeljebb $1000 + k$ hosszúságú lehet. Bizonyítsuk be, hogy előbb-utóbb biztosan felrobban.

b) Elkerülheti-e a robbanást, ha a k . ugrása legfeljebb 2^k hosszúságú lehet?

5. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Az $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ halmaz egy olyan H részhalmazát szeretnénk kiválasztani, amely legalább $n - 1$ elemű és teljesül rá a következő feltétel: ha $x, y \in H$ (itt x és y nem feltétlenül különböző elemek) és $x + y < 2n$, akkor $x + y \in H$.

Jelölje S a H elemeinek összegét. Bizonyítsuk be, hogy S legkisebb lehetséges értéke $n(n - 1)$.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 10 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 3 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.

A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!